Bevezetés a számításelméletbe II.
2004. FEBRUÁR 19-20.
2. gyakorlat: Páros gráfok, párosítások

1. Jelöljék H gráf csúcsait az n hosszú 0-1 számsorozatok. Két csúcs pontosan akkor szomszédos, ha a csúcsokat reprezentáló számok egy bitben különböznek.
   (a) van-e Hamilton-kör H-ban?
   (b) van-e Euler-kör H-ban?
   (c) páros-e az így kapott H gráf?
2. Tudjuk, hogy G síkgráfnak van Euler-köre, bizonyítsuk be, hogy ekkor G duálisa páros gráf! Lássuk be, hogy az állítás megfordítása is igaz.
3. Egy vállalatnál hét pályázó jelentkezett hat üres munkahelyre, egy ember esetleg több helyre is. Aladár az 1-es, Béla az 1-es és 6-os, Csaba a 2-es, 3-as és 4-es, Dénes a 2-es és 5-ös, Elemér a 3-as, 4-es és 5-ös, Ferenc az 1-es és 6-os, végül Géza a 6-os munkahelyre. Ábrázoljuk a helyzetet páros gráffal! Döntsük el, hogy betölthető-e mind a hat munkahely. Ha nem mind, akkor legfeljebb hány tölthető be? Javít-e valamit, ha Ferencnek több pénzt ígérünk, és így elérjük, hogy elfogadja a 2-es munkahelyet?
4. Egy osztályban vegyes párosokat szeretnének összeállítani az iskolai pingpong-bajnokságra. Öt fiú és öt lány tud játszani, de nem minden szóbajöhető pár akar együtt játszani. Andrisnak mindegy, hogy kivel játszik, Flórával, Gabival, Helgával, Ildivel vagy Jutkával, de a többi fiú, Balázs, Csaba, Dani és Elemér csak Jutkával hajlandó játszani. Hány párt tud az osztály kiállítani?
5. Lássuk be, hogy minden fa páros gráf és maximum egy teljes párosítása lehet!
6. Legyen G egy egyszerű, összefüggő, páros gráf, melynek mindkét pontosztályában n pont van, és az egyik pontosztályában minden pont foka különböző. Bizonyítandó, hogy ekkor létezik teljes párosítása G-nek.
7. Ha egy összefüggő páros gráfban létezik Hamilton-kör, akkor létezik teljes párosítás. Igaz-e visszafelé? (sátísoráp sejlet kizetél rokka...)
8. Egy $2n$ pontú gráfban a minimális fokszám legalább n. Bizonyítsd be, hogy ekkor létezik teljes párosítás!
9. Bizonyítsd be, hogy egy reguláris páros gráfban mindig létezik teljes párosítás!
10. Lássuk be, hogy egy reguláris páros gráf élhalmaza partícionálható teljes párosításokra! (Tehát az élek kiszínezhetőek r db színnel úgy, hogy mindegyik egyszínű élhalmaz egy teljes párosítást adjon.)
11. Adott egy $n \times n$ -es mátrix, amelynek minden sorában, és oszlopában pontosan k darab egyes van. Bizonyítsd be, hogy ekkor kiválasztható n darab egyes úgy, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egy darab egyest választottunk ki!
12. **ZH!** Egy 100 pontú gráf tetszőlegesen kiválasztott 3 pontja között legalább 2 él fut. Bizonyítsuk be, hogy ekkor létezik a gráfban teljes párosítás!
13. Egy táncmulatságon 25 lány és 25 fiú van jelen. E társaságban minden lány ismeretségben van legalább 13 fiúval és minden fiú legalább 13 lánnyal. Bizonyítsuk be, hogy páros táncra perdülhetnek egyszerre mind az 50-en úgy, hogy az egymással táncolók ismerik egymást!
14. Egy ünnep alkalmával török szultán udvarában a férfiak két-két háremhölgyet választanak. Minden férfinek legalább 2 háremhölgy tetszik. Mi a feltétele annak, hogy minden férfi neki tetsző két háremhölggyel tölthesse az éjszakát?