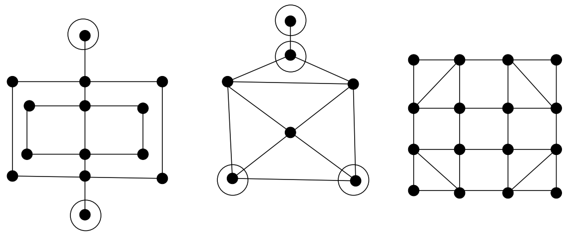
Bevezetés a számításelméletbe II.

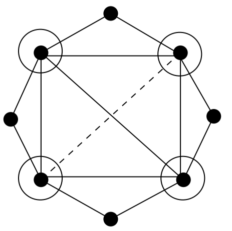
Megoldás

1. gyakorlat: Euler- és Hamilton bejárások

1. Akkor és csakis akkor létezik Euler-út az adott gráfokban, ha a páratlan fokú pontok száma 0 vagy 2. Ez az első és a 3. gráfra teljesül. (A harmadikban Euler-kör is van, mert minden pont foka páros.)



2. Minimálisan 1-szer kell felemelni a ceruzát, mert 4 db páratlan fokú pontja van. (Ha vennénk egy olyan élet, amelyik két páratlan fokú pontot köt össze, akkor ezt az élet elhagyva a gráfban már lenne Euler-út. Tehát a maradék gráfot le tudjuk rajzolni ceruzafelemelés nélkül.)



3. A gráf minden pontja páros fokú, tehát van benne Euler-kör. Ráadásul ez az Euler-kör páros hosszú, mert az élek száma $e = \frac{4 \cdot n}{2}$ páros. Ha az Euler-körön végigmenve felváltva színezzük ki az éleket, akkor ez egy a feladat által kért jó színezést eredményez.

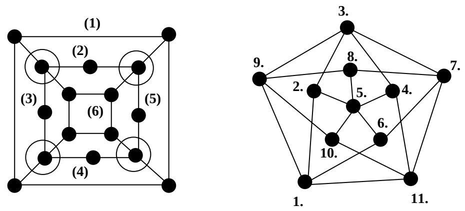
4. Minden zárt sétát minden vágás páros sok élben metsz. (Ezt bizonyító vicc: Arisztid: -Én tegnap 4-szer is átmentem a Dunán. Tasziló: -Az semmi, én 9-szer. Arisztid: -Akkor tegnap sem aludtál otthon?!?) Az Euler-kört is páros sok élben metszi minden vágás. Az Euler-kör minden élen pontosan 1-szer halad át, ebből adódik, hogy az összes él közül minden vágásba páros sok él kerül bele. A másik irány: Vegyük a pontokat izoláló vágásokat (azokat az éleket, melyek egy pontból indulnak ki). Ezek páros sok élet tartalmaznak a feltétel szerint, vagyis minden pont foka páros, amiből adódik, hogy létezik Euler-kör.

5. A keletkező gráfban az 1. és a 100. pont foka 2, a 2. és 99. pont foka 3 a többié 4.

   (a) A páratlan fokú pontok száma tehát 2, ezért Euler-utat tartalmaz, de Euler-kört már nem.

   (b) Hamilton-útra példa: $1, 2, 3, \ldots, 99, 100$
   Hamilton-körre példa:
   $1, 2, 4, 6, \ldots, 98, 100, 99, 97, \ldots 3, 1$

6. Az első gráfban nincs Hamilton-kör (és út sem), mert elvéve 4 pontot a gráf 6 komponensre esik szét, tehát sérül a Hamilton-kör (és út) létezésének szükséges feltétele. A második gráfban Hamilton kör is van (így természetesen út is):

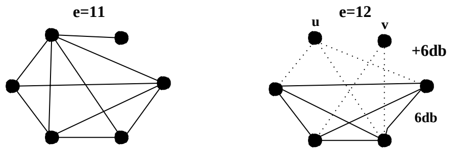


7. Nem lehet. Vegyük azt a gráfot, melynek pontjai a sakktábla mezői és két pont között fut él, ha az egyik mezőről lóval át tudok lépni a másikra. Pontosan akkor járható be a sakktábla lóval, ha ebben a gráfban létezik Hamilton-út. Az pedig nem létezik, mert a középső 4 mezőnek megfelelő pontot elvéve, a gráf 6 komponensre esik szét:

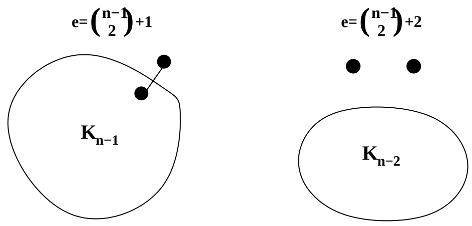
1	5	6	4
6			5
5			6
2	6	5	3

8. Legalább 6, mert egy 6 hosszú kört keresünk.

9. Legfeljebb 11. Ennyi lehet, mert egy teljes 5 pontú gráfhoz hozzávéve egy élet még nem lesz Hamilton-kör a gráfban. 12 él esetén viszont már biztosan lesz! Ehhez azt fogjuk belátni, hogy teljesül az Ore-feltétel, tehát bármely két pontot véve, azok vagy össze vannak kötve, vagy a fokszámaik összege legalább 6. Vegyünk tehát két tetszőleges pontot, u-t és v-t. Ezeken kívül legfeljebb 6 élet tudunk behúzni a gráfban. A többi 6 él behúzásával egyenként növekszik u vagy v fokszáma, tehát végül a két pont fokszámának összege legalább 6 lesz.



10. A gondolatmenet megegyezik az előző feladatéval. A teljes $n-1$-pontú gráfhoz 1 élet hozzávéve még nem keletkezik Hamilton-kör. Ennél több élre ismét az Ore-feltétel teljesülését fogjuk igazolni. Az élek száma tehát ebben az esetben $e = \binom{n-1}{2} + 2 = \binom{n-2}{2} + n$. Tetszőleges két pontot véve a többi pont között legfeljebb $\binom{n-2}{2}$ él mehet. A maradék n él hozzávétele viszont egyenként növeli valamelyik pont fokszámát az adott kettő közül, ezért végül a fokszámaik összege legalább n lesz.



11. Mutassuk meg, hogy $n \geq 5$-re igaz az alábbi két állítás!

    (a) $n = 5$-re az öt hosszú kör jó, mert ennek komplementere szintén egy 5-hosszú kör. Nagyobb n-ekre is jó az n-hosszú kör, ugyanis a komplementer gráfban teljesül a Dirac feltétel (mert minden pont foka: $d(i) = (n-1)-2 = n-3 \geq \frac{n}{2}$), ezért a komplementer gráfban is lesz Hamilton-kör.

    (b) Az előző feladatban szereplő első gráf egy jó példa, ugyanis abban nincs Hamilton-kör, a komplementere viszont egy csillaggráf, amiben szintén nem lehet Hamilton-kör.

12. Vegyünk hozzá a gráfhoz egy pontot, és kössük össze a gráf összes csúcsával. Az így kapott gráfban minden pont foka legalább n (az új pontnak $2n-1$, a régieknek pontosan n a foka). Ebben az új gráfban tehát található Hamilton-kör. Ez után már egyszerű meggondolni, hogy ha elhagyjuk a hozzáadott pontot, akkor a maradék (eredeti) gráfban egy Hamilton út biztosan fog maradni.

13. Konstruáljunk egy gráfot a feladathoz a következőképpen: a gráf pontjai legyenek az emberek, és két ember pontosan akkor legyen összekötve, ha jóban vannak egymással. Ebben a gráfban egy Hamilton-kör pontosan megfelel egy jó leültetésnek az asztal körül. Azt kell csak belátnunk, hogy 25 estén keresztül akárhogy is változik a gráf élek törlésével (egy élet pontosan akkor törlünk, ha két ember összeveszik egymással) mindig találhatunk benne Hamilton-kört. Ennek belátására a Dirac-feltétel teljesülését fogjuk igazolni. Az első este még mindenki jóban van mindenkivel, tehát a pontok fokszáma 99. Mindenki minden este pontosan 2 emberrel veszik össze, tehát mindenkinek 2-vel csökken a fokszáma egy este után. 24 este után minden pont fokszáma 51 lesz, tehát még teljesül a Dirac-feltétel ($51 \geq \frac{100}{2}$). Ezért a 25. estére is biztosan lesz Hamilton-kör a gráfban, vagyis találhatunk egy jó ültetést.