Bevezetés a számításelméletbe II.

2004. Április 29-30.

12. gyakorlat: Homomorfizmus, faktorcsoport

1. Vegyük a $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 11\}$ számokat a $\pmod{12}$ összeadásra nézve. Normálosztója-e ennek a csoportnak a 4-el osztható számok halmaza? Ha igen, akkor mik a velük képzett faktorcsoportok?

2. Mik lehetnek a C_{12} ciklikus csoport normálosztói? Mik a velük képzett faktorcsoportok?

3. Milyen csoportokra lesz a $g \mapsto g^2$ leképezés homomorfizmus?

4. Homomorfizmus-e a következő két leképezés $\Phi_i : C_{10} \to C_{10}$

   (a) $\Phi_2 : a \to a^2$

   (b) $\Phi_3 : a \to a^3$

   Ha igen, akkor határozd meg a $Ker(\Phi)$ és az $Im(\Phi)$ halmazokat! Melyik leképezés izomorfizmus?

5. Legyen $\Phi :< \mathbb{Z}, + > \to < [0, 1], + >$, oly módon, hogy minden páros számot a 0-ba és minden páratlan számot az 1-be vigyen. Homomorfizmus-e a leképezés? Ha igen, akkor határozd meg a $Ker(\Phi)$ és az $Im(\Phi)$ halmazokat, és a mag faktorcsoportját!

6. Legyen $\Phi :< \mathbb{R}, + > \to < \mathbb{Z}, + >$, oly módon, hogy $\Phi(a) = \lfloor a \rfloor$. Homomorfizmus-e a leképezés? Ha igen, akkor határozd meg a $Ker(\Phi)$ és az $Im(\Phi)$ halmazokat, és a mag faktorcsoportját!

7. Tekintsük a komplex számokat az összeadás művelettel! Mutassuk meg, hogy ennek a csoportnak a homomorfizmusa a valós rész képzés! Mi a homomorfizmus magja, mi a mag faktorcsoportja?

8. Tekintsük a nemnulla komplex számokat a szorzás művelettel! Mutassuk meg, hogy ennek a csoportnak a homomorfizmusa az abszolút rész képzés! Mi a homomorfizmus magja, mi a mag faktorcsoportja?