Bevezetés a számításelméletbe II.

2004. ÁPRILIS 15-16.

10. gyakorlat: Kongruencia, Euler-Fermat tétel

1. Határozzuk meg a $3, 8, 17, -17, 120, 54, -40, 236, 227$ számok
   (a) legkisebb nem negatív maradékait,
   (b) abszulutértékben legkisebb maradékait,
   (c) közül melyek kongruensek egymással

   modulo 11!

2. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat:
   (a) $11x \equiv 12 \pmod{18}$,
   (b) $5x \equiv 5 \pmod{35}$,
   (c) $6x \equiv 5 \pmod{35}$,
   (d) $7x \equiv 5 \pmod{35}$,
   (e) **ZH!** $6x + 1 \equiv 10 \pmod{15}$,
   (f) **ZH!** $14x - 4 \equiv 80 \pmod{21}$.

3. Oldjuk meg minél egyszerűbben az alábbi kongruenciákat:
   (a) $202x \equiv 157 \pmod{203}$,
   (b) $309x \equiv 451 \pmod{617}$,
   (c) $5x \equiv 561 \pmod{1968}$,
   (d) $105x \equiv 761 \pmod{809}$,

4. Melyek megoldhatóak az alábbi szimultán kongruenciák közül? Oldjuk is meg őket!
   (a) $x \equiv 3 \pmod 5$, $x \equiv 4 \pmod 7$
   (b) $x \equiv 3 \pmod 6$, $x \equiv 6 \pmod 8$
   (c) $3x \equiv 2 \pmod 4$, $2x \equiv 3 \pmod 5$
   (d) $5x \equiv 3 \pmod 7$, $4x \equiv 5 \pmod{10}$

5. Oldjuk meg a megoldhatóakat az alábbi lineáris diofantikus egyenletek közül!
   (a) $15x + 13y = 19$
   (b) $17x + 11y = 22$
   (c) $12x + 30y = 26$
   (d) $18x + 28y = 10$

6. Számítsuk ki az alábbi értékeket:
   (a) $d(12)$, $\phi(12)$, $\sigma(12)$,
   (b) $d(2004)$, $\phi(2004)$, $\sigma(2004)$.

7. Mennyi $\phi(9)$, $\phi(133)$, $\phi(540)$, $\phi(7!)$?

8. **ZH!** Milyen n értékekre igaz, hogy $\phi(n)$ páratlan? (és milyen n-ekre lesz $d(n)$ páratlan?)

9. Az Euler-féle ϕ függvény tulajdonságait felhasználva,
   (a) bizonyítsuk be, hogy $11 \mid n^{11} + 10n$,
   (b) igazoljuk, hogy ha n nem osztható 17-tel, akkor n^8+1 vagy n^8-1 biztosan osztható 17-tel,
   (c) számítsuk ki 108^{182} ill. 5^{17} maradékát 19-cel osztva,
   (d) bizonyítsuk be, hogy $42 \mid n^7 - n$.

10. Bizonyítsuk be, hogy
    (a) $39^{14} - 1$ osztható 5-tel,
    (b) $333^{444} + 444^{333}$ osztható 7-tel,
    (c) $4^{90} + 1$ oszhtató 17-tel!

11. Kiszámítandó $(((43)^{43})^{43})^{43}$ modulo 49.

12. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat:
    (a) $49^{49} \equiv x \pmod{15}$,
    (b) $3^{80}x \equiv 23 \pmod{100}$.

13. Határozzuk meg az utolsó
    (a) három jegyét számjegyét 403^{402}-nek,
    (b) két számjegyét $29^{39^{49}}$-nek,
    (c) számjegyét $7^{6^{5^{4^{3^2}}}}$-nek!

14. Bizonyítsuk be, hogy
    (a) $2^m + 1$ prím $\Rightarrow$ m – 2-hatvány,
    (b) $2^p - 1$ prím $\Rightarrow$ p – prím!