MŰEGYETEM 1782

BME

A stabil párosítás probléma és általánosításai: algoritmikus és játékelméleti nézőpontból

PhD Disszertáció

Biró Péter

konzulens: Fleiner Tamás

Budapest, 2007 Szeptember

Bevezetés

Általános értelemben *stabilnak* nevezünk egy olyan piaci helyzetet, ahol nincsenek olyan szereplők, akiknek lehetőségük van egy új együttműködés létrehozására, amelyben mindannyian jobban járnának (felbontva eközben esetleg más jelenlegi kapcsolataikat). Gale és Shapley 1962-es, klasszikussá vált cikkében [19] a házassági kapcsolatok alapmodelljén szemléltette és elemezte ezt a problémát. A házasságoknak megfelelő párosítás stabilitása itt azt jelenti, hogy nincs olyan ú.n. *blokkoló pár*, melyben mindkét félnek megérné egy új házasságot kötnie egymással (elhagyva esetleg jelenlegi házastársaikat). Gale és Shapley egy természetes algoritmus segítségével megmutatta, hogy miként található tetszőlegesen megadott preferenciákra stabil párosítás a vizsgált fiúk és lányok között.

A stabil párosítás probléma, és az ennek különféle általánosításaiból kapott modellcsalád a játékelmélet és a kombinatorikus optimalizálás egyik fontos kutatási területévé vált az elmúlt évtizedekben. Ennek talán legfőbb magyarázata, hogy a modellek igen hasznosnak bizonyultak gazdasági és társadalmi problémák leírására, sőt, az ezekre épülő algoritmusokat egyre szélesebb körben kezdték el alkalmazni központi párosító programokban is. Dolgozatom egyik célja az alapmodellek és a legismertebb alkalmazások bemutatása.

A stabil párosítás problémát páros gráfok esetén napjainkban is gyakran a házassági kapcsolatok kontextusában tárgyalják. A példa használatához azonban hallgatólagosan három dolgot teszünk fel: nincs kifizetés (hozomány) a szereplők között, házasság csak fiú és lány között létesülhet, továbbá minden szereplőnek legfeljebb egy házastársa lehet. A stabil párosítási modellek legfontosabb általánosításai pontosan ezen feltételek feloldásával kaphatók meg.

Játékelméleti nézőpontból a stabil párosítás probléma kifizetéses és kifizetés nélküli változata ekvivalens egy megfelelő TU- illetve NTU-játék (vagyis átváltható hasznossággal rendelkező, illetve anélküli kooperatív játék) magbeli elemének megkeresésével. A stabil házasság probléma egy alapvető NTU-játéknak tekinthető. Amennyiben megengedjük a kifizetéseket a játékosok között, akkor a megfelelő TU-játékot *hozzárendelési játéknak* nevezzük. Shapley és Shubik [33] látta be, hogy ezen játékok magja sohasem üres.

Sok érdekes kapcsolat fedezhető fel a játékelmélet és gráfelmélet ide vonatkozó eredményei között. A TU-játékok magbeli elemei valójában minimális fedésnek felelnek meg a gráfokban, abban az esetben ha ennek értéke megegyezik a maximális súlyú párosítás értékével, vagyis amennyiben a TU-játék magja nem üres. Ebből következik, hogy Shapley és Shubik eredménye valójában egy egyszerű következménye Egerváry [18] maximális súlyú párosításokról szóló tételének. Amennyiben az alapkoalíciók kettőnél több szereplőből is állhatnak, akkor gráfok helyett hipergráfokkal modellezhetjük a problémát. Érdekesség, hogy páros gráfok esetén a feladatok megoldhatósága egyszerű következménye Scarf [32] játékelméletből ismert lemmájának és Lovász [25] normális hipergráfokra vonatkozó tételének.

2. Stabil szobatárs probléma

A stabil házasítás probléma modellezésekor a szereplőket egy gráf csúcsainak feleltetjük meg, ha két szereplő egymásnak kölcsönösen elfogadható, akkor egy él fut a megfelelő két csúcs között a gráfban. A lehetséges partnereken vett preferenciák szerint minden csúcsnak szigorú rendezése van a rá illeszkedő éleken. Ha f és e él ugyanarra a v csúcsra illeszkedik, és f jobb mint e a v csúcs rendezése szerint, akkor azt $f >_v e$-vel jelöljük, és azt mondjuk, hogy f él dominálja az e élet a v csúcsban. Egy párosítást a gráfban *stabilnak* mondunk, ha minden $e \notin M$ él dominálva van egy M-beli éllel legalább az egyik végpontjában. A stabil párosítást úgy is definiálhatjuk, mint egy *blokkoló él* nélküli párosítást, ahol az $e = \{u, v\}$ él blokkolja az M párosítást, ha u vagy párosítatlan vagy az e élet preferálja az u-t M-ben fedő élhez képest, és v szintén vagy párosítatlan vagy az e élet preferálja az v-t M-ben fedő élhez képest.

Tömör leírást adhatunk a stabil párosításokra a *karakterisztikus függvény* segítségével. Egy adott $G = (V, E)$ gráfban egy $M \subseteq E$ párosítás leírására definiáljunk egy $x_M : E \longrightarrow \{0, 1\}$ karakterisztikus függvényt, ahol minden $e \in E$ élre teljesül, hogy

$$x_M(e) = \begin{cases} 1 & \text{ha } e \in M \\ 0 & \text{ha } e \notin M \end{cases}$$

Ekkor az adott gráfra, és az egy csúcsra illeszkedő élek rendezésére egy M stabil párosítás definiálható a karakterisztikus függvényére megadott alábbi egyenlőtlenségekkel:

(P) Párosítás:
$\sum\limits_{v \in e} x_M(e) \leq 1$ minden $v \in V$-re

(S) Stabilitás:
minden $e \notin M$ élre létezik egy $v \in e$ csúcs, hogy $\sum\limits_{v \in f, f \geq_v e} x_M(f) = 1$

Amennyiben a gráf páros, akkor a stabil párosítás problémát *stabil házasítás problémának* nevezzük, általános gráf esetén pedig *stabil szobatárs problémának* hívjuk.

Gale and Shapley [19] megmutatta egy egyszerű példával, hogy ez utóbbi esetben nem mindig létezik megoldása a feladatnak. Irving [21] konstruálta meg az első polinomiális algoritmust, amely egy stabil megoldást talál, amennyiben létezik ilyen az adott feladatra. Később, Tan [35] mutatta meg, hogy az úgynevezett stabil fél-párosítás létezése minden stabil szobatárs problémára garantált. A stabil fél-párosítás egyszerűen definiálható a fenti egyenlőtlenségekkel, ahol (M) a fél-párosítás, (S) pedig a stabilitás tulajdonságát biztosítja, amennyiben a karakterisztikus függvény értékkészletét kibővítjük a következőképpen: $x_{hM} : E(G) \longrightarrow \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

2.1. „Majdnem stabil" párosítások

Ha nem létezik megoldása egy stabil szobatárs feladatnak, akkor természetes módon merül fel a kérdés, hogy keressünk egy olyan párosítást amelyre nézve a blokkoló élek száma a lehető legkevesebb, vagyis a párosítás a „lehető legstabilabb". Amennyiben nem szigorú a szereplők preferenciája, akkor a stabil párosítás *holtversenyes* problémáját kapjuk. Itt egy párosítás *gyengén stabil*, ha nem létezik blokkoló él, amelyet mindkét végpontja szigorúan preferál. A következő eredmény Abraham, Biró és Manlove [1] cikkében lett publikálva.

2.1 Tétel [1] *Egy adott stabil szobatárs probléma esetén a blokkoló élek minimális száma nem közelíthető $n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ faktoron belül, semmilyen $\varepsilon > 0$-re, kivéve ha $P = NP$.*

2.2 Tétel [1] *Egy adott holtversenyes stabil szobatárs probléma esetén a blokkó élek számának minimális száma nem közelíthető $n^{1-\varepsilon}$ faktoron belül, semmilyen $\varepsilon > 0$-re, kivéve ha $P = NP$.*

A következő táblázatban összegyűjtöttünk néhány kapcsolódó eredményt. A hivatkozások egyszerűsítése végett minden eredményhez egy [Ri] indexet rendeltünk. Gale és Shapley [19] valamint Irving [21] már említett eredményei az [R1] és [R2] indexeket kapják. A gyengén stabil párosítás keresésének problémája holtversenyes szobatárs probléma esetén NP-teljes [R3]. Ezt Ronn [28] látta be először teljes gráfokra, majd Irving és Manlove [23] igazolta ugyanezt nem teljes gráfok esetén.

A stabilitás mellett természetes feladatként merülhet fel a párosítás méretének maximalizálása. Manlove és társai [26] megmutatták, hogy a gyengén stabil párosítás méretének maximálizálásához tartozó eldöntési probléma NP-teljes még a holtversenyes stabil házasítás probléma esetén is [R4]. Végül, Manlove nemrégiben igazolta, hogy a blokkoló élek minimalizálásának feladata a maximális méretű párosítások körében a stabil házasítás probléma esetén is közelíthetetlen [R5] (személyes kommunikáció).

A probléma, hogy keressünk M-et,	ahol M	páros gráf		tetszőleges gráf	
		(szigorú)	nem szig.	(szigorú)	nem szig.
ahol M stabil	(tetsz.)	Igen [R1]	(Igen)	P [R2]	NPc [R3]
	max	(P)	NPc [R4]	(P)	(NPc)
a blokkoló élek száma M-re min.	(tetsz.)	(=0)	(=0)	**NPc (2.1)**	**NPc (2.2)**
	max	NPc [R5]	(NPc)	(NPc)	(NPc)

Ebben a táblázatban, P azt jelenti, hogy a probléma megoldható polinomiális idejű algoritmussal, NPc jelöli azokat a feladatokat, ahol a (kapcsolódó) eldöntési probléma NP-teljes. Végül (NPc) jelentése az, hogy a feladat NP-teljessége egyszerűen következik az említett eredményekből.

2.2. A stabil párosítások dinamikája

A stabil házasítás probléma esetén Knuth [24] tette fel azt a kérdést, hogy egy tetszőleges párosításból kiindulva mindig elérhető-e egy stabil párosítás blokkoló élek egymás utáni kielégítésével. Roth és Vande Vate [31] pozitív választ adott a kérdésre egy decentralizált algoritmus segítségével, amelyben párok és egyedülálló játékosok egyenként lépnek be a piacra, és a piaci egyensúly minden belépést követően helyreáll egy természetes ajánlattételi mechanizmus révén. Később, Diamantoudi, Miyagawa és Xue [17] bizonyította be ugyanezt az állítást megoldható stabil szobatárs problémák esetén.

Habár Roth és Vande Vate cikkének eredetileg más célja volt, algoritmusuk modellként használható a kétoldalú piacok dinamikájának leírására. Másrészről, ez a mechanizmus egyben egy inkrementáló algoritmusnak is tekinthető, amely a belépő játékosok belépési sorrendjétől függően ad egy stabil párosítást. Ezen eredményektől függetlenül, hasonló algoritmust konstruált Tan és Hsueh [36] stabil fél-párosítás keresésére stabil szobatárs probléma esetén. Páros gráfok esetén a Tan–Hsueh algoritmus valójában ekvivalens a Roth–Vande Vate algoritmussal. Az általánosabb megoldás azért komplikáltabb, mert nempáros gráfok esetén végtelen ismétlődések is előfordulhatnak az ajánlattételi sorozatban, de ilyenkor egy új fél-súlyú kör létrehozásával egy új stabil fél-párosítást lehet kapni.

Gale és Shapley [19] eredménye szerint a „lánykérő" algoritmussal kapott párosítás fiú-optimális, vagyis nincs olyan stabil párosítás, ahol bármelyik fiú jobb párt kaphatna, vagy másképpen szólva minden fiú a *legjobb stabil párját* kapja. Blum, Roth és Rothblum [13] ezen eredmény felhasználásával elemezte a kétoldalú piacok dinamikáját. Megmutatták, hogy az ajánlattételi sorozat eredménye mindig megjósolható: egy új fiú megjelenését követően minden fiú vagy marad az aktuális partnerével amennyiben ez lehetséges, vagy egy rosszabb párt kap, aki viszont a legjobb stabil párja a fiúnak az új piacon.

Blum és Rothblum [14] megmutatta, hogy a fenti eredményekből következik, hogy az utolsóként érkező játékos mindig a legjobb stabil párját kapja a Roth–Vande Vate algoritmus eredményeként. Biró, Cechlárová és Fleiner [11] általánosította ezen eredmények nagy részét nempáros gráfok esetére. Az alább ismertetett eredményeknél a legfontosabb bizonyítások a következő Kulcs Lemmán alapulnak.

2.3 Lemma (Kulcs Lemma) [11] *Ha hM_v egy stabil fél-párosítás $G-v$-ben, és az $\{v,u\}$ él nem blokkolja hM_v-et, akkor v és u nem lehetnek párosítva semmilyen stabil fél-párosításban G-ben.*

2.4 Tétel [11] *Tegyük fel, hogy egy új játékos, v lép be a piacra és a stabilitás az $S=(A|B)$ ajánlattételi sorozatot követően áll helyre. Ekkor minden játékos $a\in A$ ($b\in B$), aki ajánlatot téve (elfogadva) válik párosítottá, a legjobb (legrosszabb) stabil párját kapja a kialakuló stabil fél-párosításban.*

2.5 Következmény [11] *Ha egy játékos utolsóként érkezik a piacra, akkor a legjobb stabil párját kapja.*

2.6 Tétel [11] *Minden játékos, aki az inkrementáló algoritmus utolsó aktív fázisában lesz párosítva, úgy hogy ajánlatot tett (fogadott el), akkor a legjobb (legrosszabb) stabil párt kapja a létrejövő stabil megoldásban.*

2.7 Következmény [11] *Egy stabil párosítás, amelyben senki sincs összepárosítva a legjobb stabil párjával, nem kapható meg inkrementáló algoritmussal.*

Blum és Rothblum [14] megmutatta, hogy egy játékosnak csak előnyére válhat, ha minél később érkezik a piacra. A következő, ennek megfelelő állítást sikerült bizonyítanunk a stabil szobatárs problémára.

2.8 Tétel [11] *Legyen az inkrementáló algoritmusban σ és σ' két érkezési sorrend, amely csak annyiban különbözik egymástól, hogy egy v játékos a σ sorrend szerint később érkezik* *a piacra. Legyen hM és hM' az a két stabil fél-párosítás, ami a σ és σ' érkezési sorrendek alapján alakul ki az inkrementáló algoritmus végén. Ha v párosított akkor, legalább olyan jó párt kap hM-ban, mint hM'-ben.*

Gale és Sotomayor [20] megmutatta, hogy ha néhány fiú meghosszabítja a preferencialistáját, akkor semmelyik fiú nem járhat jobban az új fiú-optimális stabil párosításban. Ebből az is következik, hogy ugyanez az állítás igaz lesz abban az esetben is amikor néhány új fiú lép be a játékba. Roth és Sotomayor [30] belátta, hogy amennyiben egy újonnan érkező fiú párosítva van az új játékban, akkor biztosan van néhány lány, aki az új piacon minden stabil párosításban jobb párt kap, mint a régiben, és lesz néhány fiú, aki az új piacon minden stabil párosításban rosszabb párt kap, mint a régiben. A következőkben ezt az eredményt általánosítjuk nempáros gráfokra, felhasználva Irving és Pittel [27] mag-konfigurációkra kimondott tételének egy alább ismertetett általánosabb változatát. (Egy hM_v stabil fél-párosítást $G - v$-ben egy v csúcshoz tartozó *mag-konfigurációnak* nevezünk, ha v-t hozzáadva a gráfhoz az ajánlattételi sorozat, $S(hM_v)$ a lehető legrövidebb.)

2.9 Tétel [11] *Ha hM_v egy v-hez tartozó mag-konfiguráció, akkor a kapcsolódó ajánlattételi sorozatban $a_0(= v), b_1, a_1, \dots, a_{k-1}, b_k(, a_k)$ minden személy legfeljebb egyszer szerepel, a sorozat egyértelműen meghatározott, és minden olyan, a sorozatban szereplő játékosra, aki G-ben párosított, a következő tulajdonságok teljesülnek:*

a) b_i a legrosszabb stabil partnere a_i-nak $G - v$-ben és b_{i+1} a legjobb stabil partnere a_i-nak G-ben;

b) a_i a legjobb stabil partnere b_i-nek $G - v$-ben és a_{i-1} a legrosszabb stabil partnere b_i-nek G-ben.

A 2.9 Tételből következik Roth és Sotomayor [30] tételének az alábbi, nempáros gráfokra vonatkozó általánosítása.

2.10 Tétel [11] *Tegyük fel, hogy egy új játékos lép be a piacra. Ekkor létezhetnek olyan játékosok, akik bizonyosan jobban (illetve rosszabbul) járnak az új piacon, mint a régi piacon, bármely stabil párosítás alakul is ki. Ezen szereplőket hatékonyan meg lehet találni.*

3. Stable allokáció probléma

A stabil allokáció probléma hipergráfokra vonatkozó változata a következő. Adott egy H hipergráf és minden v csúcsra adva van egy lineáris rendezés a v-re illeszkedő éleken. Tegyük fel továbbá, hogy nemnegatív csúcs- és élkapacitásokat: $b : V(H) \to \mathbb{R}_+$ és $c : E(H) \to \mathbb{R}_+$ rögzítünk. *Allokációnak* nevezünk egy x nemnegatív súlyfüggvényt az éleken, ha minden e élre $x(e) \leq c(e)$ és minden v csúcsra $\sum_{v \in h} x(h) \leq b(v)$. Egy allokáció *stabil* ha minden *telítetlen* e élnek (vagyis amelyre $x(e) < c(e)$) legalább az egyik v csúcsára $\sum_{v \in h, e \leq_v h} x(h) = b(v)$ fennáll. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy e él *dominálva van v-ben.*

Biró és Fleiner [7]-ben megmutatta, hogy Scarf [32] tételéből következik, hogy minden stabil allokáció problémának létezik megoldása.

3.1 Tétel [7] *Minden stabil allokáció probléma hipergráfokon megoldható.*

A stabil allokáció problémát Baïou és Balinski [5] definiálta páros gráfokra. Az ő úgynevezett *induktív algoritmusuk* kétoldalú piacokra $O(n+m)$ javító lépésben megoldja a feladatot (ahol n és m a csúcsok illetve az élek számát jelöli a gráfban), vagyis az algoritmus erősen polinomiális (vagyis a futásidő nem függ a kapacitásoktól).

Az egészértékű feladatot, (vagyis amikor egész csúcs- és él-kapacitások esetén megköveteljük, hogy az x allokáció is minden élen egész legyen) *stabil időbeosztás feladatként* definiálta Alkan és Gale [3], habár az általuk vizsgált modell a némileg általánosabb, úgynevezett *helyettesíthető* preferenciák esetére vonatkozott. Megmutatták, hogy a Gale–Shapley algoritmus egy természetes általánosításával mindig megoldható a probléma kétoldalú piacokon. Mi, az időbeosztás elnevezés helyett a stabil allokáció feladat egészértékű változatára egy szerűen *egészértékű stabil allokáció problémaként* hivatkozunk a dolgozatban.

Fontos megjegyeznünk, hogy amennyiben minden csúcs- és élkapacitás 1 egy egészértékű stabil allokáció problémában, akkor a stabil párosítás problémát kapjuk. Ha csak az élkapacitásokra kötjük ki ezt a feltételt, akkor az úgynevezett *stabil b-párosítás problémát* kapjuk (amit gyakran sok-a-sokhoz stabil párosítás problémának is neveznek kétoldali piacok esetén). Továbbá, ha a kétoldalú piacok egyik oldalán minden csúcs kapacitása 1, akkor a sok-az-egyhez stabil párosítás, (vagy „az egyetemi felvételi", vagy „a korházi gyakornok elhelyezésének problémáját" kapjuk).

Minden fent leírt speciáis egészértékű allokáció probléma megoldható a Gale-Shapley algoritmussal kétoldalú piacok esetén, sőt, valójában Gale és Shapley [19] cikkének az egyetemi felvételi probléma megoldása volt az eredeti célja. Az általuk leírt természetes algoritmus szolgál alapul rengeteg jelenleg is működő párosító programnak kétoldalú piacokon. Mi több, mint később kiderült [29], ugyanez az algoritmus már 1952-ben implementálva lett a National Intern Matching Program-ban.

3.1. Az egészértékű stabil allokáció probléma gráfokon

Biró és Fleiner megmutatta [7]-ben, hogy a Scarf-lemmából [32] következik, hogy minden egészértékű stabil allokáció problémának gráfokon létezik fél-egész megoldása. A bizonyítás hasonló Aharoni és Fleiner [2] bizonyításához, amellyel a stabil fél-párosítások létezését igazolják a stabil szobatárs probléma esetén.

3.2 Tétel [7] *Minden egészértékű stabil allokáció problémának létezik fél-egész megoldása.*

A tézisben [6] bemutatunk két alternatív bizonyítást is a fenti állítás igazolására. Az első érvelésben megmutatjuk, hogy minden egészértékű stabil allokáció probléma gráf-konstrukciókkal visszavezethető a stabil szobatárs problémára. Egy egyszerű lépéstől eltekintve ez az érvelés megtalálható Cechlárová és Fleiner [15] munkájában. Fontos azonban megjegyeznünk, hogy ez a visszavezetés nem polinomiális, a stabil szobatárs probléma mérete erősen függ az allokációs problémában megadott kapacitásoktól.

A másik bizonyítás konstruktív: Baïou és Balinski [5] algoritmsát általánosítjuk nempáros gráfokra. Az induktív algoritmus lényege a következő: kezdetben minden v csúcsra a kapacitást $b^0(v) = 0$-ra állítjuk. Ekkor $x^0(e) = 0$ minden $e \in E(G)$-re egy triviális stabil allokációt ad. Ezután folyamatosan növeljük a csúcsok kapacitását, miközben javító-utakon keresztül változtatva az allokáción, mindig stabil megoldást kapunk az aktuális kapacitásokra. Ezt addig folytatjuk, amíg minden csúcson el nem érjük az eredetileg megadott b csúcskapacitást.

Ahogyan Baïou és Balinski induktív algoritmusa egyfajta általánosítása Roth és Vande Vate inkrementáló algoritmusának, úgy az általános, nempáros gráfokra vonatkozó induktív algoritmus is általánosítja a Tan–Hsueh inkrementáló algoritmust. Valójában, ha az induktív algoritmust a szobatárs problémára alkalmazzuk, akkor igazolható, hogy ugyanazon a javító-úton történik meg a változtatás, mint amelyiken a mag-konfigurációkhoz tartozó legrövidebb ajánlattételi sorozat végbemegy az inkrementáló algoritmusban.

Az általánosított induktív algoritmus futási idejéről a következő állítást láttuk be a tézisben [6].

3.3 Tétel [6] *Az induktív algoritmus $O(n+m)\sum_{v\in V(G)} b(v)$ növelő lépés után ad fél-egész stabil allokációt egy egészértékű stabil allokáció problémára gráfok esetén.*

Vagyis az általánosított induktív algoritmus nem marad erősen polinomiális. Sőt, [6]-ben egy példa segítségével megmutatjuk, hogy a futási idő valóban a csúcsok számának exponenciális függvénye lehet. Habár érdemes megjegyeznünk, hogy az úgynevezett skálázási tulajdonság miatt az induktív algoritmus ismert technikával polinomiálissá tehető. De az a kérdés továbbra is nyitott, hogy vajon létezik-e erősen polinomiális algoritmus az egészértékű stabil allokáció problémára nempáros gráfokon.

3.2. Felsőoktatási felvételi rendszer Magyarországon

1983 óta a felsőoktatási felvételi rendszer egy központi párosító program segítségével működik Magyarországon. A magyar egyetemeken az oktatás karok, és azon belül is szakok szerint van szervezve viszonylag független módon. Ezért Magyarországon a diákok egyes szakokra adhatják be jelentkezésüket.

A felvételi eljárás eljárás kezdetén a diákok a preferenciájukat is megadják azon szakokról, amelyekre felvételiznek. A diákok minden szak esetén felvételi pontszámot kapnak a középiskolai eredményeik és a felvételi vizsgák alapján. Megjegyezzük, hogy ezen pontszámok különböző szakok esetén eltérőek lehetnek. Minden egyetem adott számú diákot vehet fel az egyes szakokra, ezeket a *kvótákat* az Oktatási Minisztérium előre rögzíti. A jelentkezések és a pontszámok összesítése után egy központi program számítja ki a felvételi ponthatárokat minden szak esetén. Minden jelentkező arra az első szakra lesz felvéve a rangsora szerint, ahol a pontszáma eléri a felvételi ponthatárt.

Formálisan $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ jelölje a jelentkezőket és F a szakok halmazát, ahol q_u az f_u szak kvótáját jelöli. Legyen az a_i jelentkező rangsora egy P^i listában rögzítve, ahol $f_v >_i f_u$ azt jelenti, hogy f_v szak megelőzi f_u szakot ebben a listában, vagyis a_i az f_v szakot preferálja az f_u-val szemben. Legyen s_u^i az a_i jelentkező pontszáma az f_u szakon.

Egy l ponthatár egy egészértékű nemnegatív függvény $l : F \to \mathbb{N}$. Egy a_i jelentkező az f_u szakra lesz felvéve az l ponthatár szerint, amennyiben eléri a ponthatárt az f_u szakon, és f_u az első ilyen szak a listáján, vagyis $s_u^i \geq l(f_u)$, és $s_v^i < l(f_v)$ minden $f_v >_i f_u$ szakra. Egy l ponthatár *megengedett*, ha a felvett jelentkezők száma egyik szak esetén sem több mint a megadott kvóta. Egy megengedett ponthatárt *stabilnak* nevezünk, ha semmelyik szakon nem csökkenthető a ponthatár a kvóta túllépése nélkül (feltéve, hogy a többi szakon a ponthatárok változatlanok maradnak). Megjegyezzük, hogy abban az esetben, amikor nincsenek holtversenyek (vagyis amikor a jelentkezők pontszámai különböznek minden szak esetén), akkor a ponthatárokhoz tartozó párosítások stabilitása ekvivalens Gale és Shapley [19] eredeti stablitás fogalmával.

A Magyarországon jelenleg használt, ez egyetemek felől futtatott pontszámítási algoritmus, valamint ugyanezen algoritmusnak a jelentkezők felől futtatható változata is részletesen bemutatásra került [8]-ben. Mindkét algoritmus természetes általánosítása a Gale–Shapley algoritmusnak. Az egyetleg különbség, hogy ebben az esetben a holtversenyek miatt az egyetemek nem választhatnak ki pontosan annyi jelentkezőt, amennyi a kvótájuk, hanem minden esetben azt a lehető legkisebb ponthatárt adják, amelyre a felvettek száma még nem haladja meg a kvótát.

Amennyiben a jelentkezők pontszámai különbőzők lennének minden szak esetén, akkor ezen algoritmusok tökéletesen megegyeznének a Gale–Shapley algoritmus két változatával. Emiatt nem meglepő, hogy mind a stabilitás, mind a megoldások optimalitása tekintetében hasonló állításokat lehet belátni ezen pontszámítási algoritmusokra is:

3.4 Tétel [8] *Mind az egyetemek felől futtatott algoritmussal kapott ponthatár, l_F mind a jelentkezők felől futtatott algoritmussal kapott ponthatár, l_A stabil.*

Azt mondjuk, hogy egy l ponthatár *jobb*, mint egy l_* ponthatár a jelentkezők számára, ha $l \leq l_*$, (vagyis ha $l(f_u) \leq l_*(f_u)$ minden f_u szak esetén). Ebben az esetben ugyanis minden jelentkező ugyanarra, vagy egy jobb szakra lesz felvéve az l ponthatárhoz tartozó párosítás esetén, mint az l_*-nál.

3.5 Tétel [8] *l_F a lehetséges legrosszabb és l_A lehetséges legjobb stabil ponthatár a jelentkezők részére, vagyis minden l stabil ponthatárra fennáll, hogy $l_A \leq l \leq l_F$.*

4. Oszthatatlan javak cseréje

Tegyük fel, hogy adott egy egyszerű irányított gráf $D = (V, A)$, ahol a játékosok halmaza V. Minden játékosnak legyen egy darab oszthatatlan java, például egy háza, és (i, j) legyen A-nak egy irányított éle abban az esetben, ha i háza megfelel a j játékosnak. A V halmaz egy π permutációját *cserének* nevezzük akkor, ha minden $i \in V$-re, $i \neq \pi(i)$-ből következik, hogy $(i, \pi(i)) \in A$, vagyis ha a csere folytán minden játékos egy számára megfelelő házat kap. Egy csere ekvivalens módon tekinthető irányított körök pont-diszjunkt pakolásának az irányított D gráfban. Jelöljük $C^{\pi}(i)$-vel azt a kört, amely a π cserében i játékost tartalmazza. Amennyiben $C^{\pi}(i)$ hossza legalább 2, akkor a játékost a csere által *fedettnek* mondjuk.

Shapley és Scarf [34] az oszthatatlan javak cseréjének problémáját egy partívcionálási NTU-játékként írta le és elemezte, ezt gyakran *házcsere* játékként is hivatkozzák az irodalomban. Itt a játékosok egy S halmazának lehetséges közös együttműködései az S permutációi, és az egyes játékosok ezen együttműködések feletti preferenciája egyértelműen adódik a többi játékos házain adott preferenciáján, vagyis mindenki azt a cserét szereti jobban, ahol jobb házat kap. Formálisan, mivel egy π cserében minden i játékos a $\pi^{-1}(i)$ játékos házát kapja meg, ezért i a π cserét preferálja a σ-val szemben, ha $\pi^{-1}(i)$ háza jobban tetszik neki, mint a $\sigma^{-1}(i)$ háza. Tehát ebben a játékban egy π csere benne van a játék magjában, avagy másképpen mondva *stabil*, akkor, ha nincs olyan B blokkoló koalíció és B-nek egy σ permutációja amelyben minden $i \in B$ játékos a σ cserét preferálja a π-vel szemben. Shapley és Scarf megmutatta, hogy minden íly módon definiált csere-piacnak létezik magbeli eleme. Sőt, egy ilyen magbeli elem konstruktív módon is megtalálható az úgynevezett Top Trading Cycle (TTC) algoritmussal, amit eredetileg Gale javasolt.

Az úgynevezett *permutációs játék* a házcsere játék kifizetéses változatának tekinthető. Ezen TU-játék magjának nemüres voltát Tijs és társai [37] látták be először, megmutatva, hogy a minden ilyen játék kiegyensúlyozott. Megjegyezzük, hogy ebben az esetben minden magbeli elemnek megfelelő csere egyben egy maximális összsúlyú cserét kell, hogy adjon az irányított gráfban.

Nemrégiben kiderült, hogy a fenti modell kivállóan alkalmas lehet egy fontos alkalmazás, a vesecsere probléma leírására. Itt olyan beteg-donor párok érintettek a problémában, melyek között immunológiai okok miatt az átültetés nem lehetséges. Néhány esetben az ilyen inkompatibilis párok között lehetséges a csere, ha a különböző párok donorjai és betegei kompatibilisek egymással. Itt a formális leírás szerint V jelöli az inkompatibilis párokat és egy (u, v) él akkor kerül bele a D irányított gráfba, ha az u pár donorja megfelelő a v pár betegének.

Erre a problémára alapvetően három fő megközelítés ismert az irodalomban illetve a gyakorlatban megvalósult programokban. Legfontosabb szempontként a legtöbb modellben cél a lehető legtöbb beteg megfelelő veséhez juttatása, amely egy maximális méretű csere, avagy irányított körök maximális méretű pakolásának problémájára vezet. Más alkalmazásokban viszont a megfelelő vesék közötti különbségeket is figyelembe veszik. Ilyenkor az egyik megközelítésben egy olyan megoldást keresnek, ahol a csere várható összhaszna maximális. Ez a feladat egy maximális összsúlyú körpakolási problémára vezet. Végül, a harmadik koncepcióban a fő szempont a stabilitás. Itt az alapesetben a megfelelő házcsere játék mag-megoldásai közül választunk egy „legjobb” kimenetet.

A fenti modellekben a nehézséget az okozza, hogy sok esetben a cserékben szereplő körök hossza korlátozott. Ennek gyakorlati oka az, hogy a vesecserék esetén az egy körben lévő átültetéseket mind egyidőben kell végrehajtani. A legtöbb programban ezért csak páronkénti cseréket engedélyeznek, de néhány már működő programban a 3 hosszú körök is lehetségesek. Ez motiválja a korlátos hosszú körökön történő cserék problémáját. Megjegyezzük, hogy a legfeljebb l hosszú köröket tartalmazó cserék problémája ekvivalens a legfeljebb l hosszú irányított körök pont-diszjunkt pakolásának problémájával.

Ha $l = 2$, vagyis ha csak páronkénti cseréket engedünk meg, akkor a feladat egy párosítás problémává válik egy irányítatlan G gráfon, amelyben akkor köt össze él két csúcsot, ha a páronkénti csere lehetséges a megfelelő játékosok között. Ebben az esetben a házcsere játék ekvivalens a stabil szobatárs problémával, és a permutáció játék a stabil párosítás probléma kifizetéses változatának felel meg. Ezen játékoknak lehetséges, hogy nincs mag-megoldásuk, de ennek eldöntése, illetve nemüres mag esetén egy megoldás megtalálása mindkét esetben megoldható polinom idejű algoritmussal. Amennyiben viszont a legfeljebb 3 hosszú köröket tartalmazó cserék problémáját tekintjük, ott a legtöbb feladat a TU és az NTU-játékokra is NP-nehézzé válik.

4.1. Maximális összsúlyú cserék problémája megkötésekkel

A következőkben Biró és Rizzi [12] néhány eredményét gyűjtjük össze a maximális méretű és a maximális összsúlyú legfeljebb l hosszú köröket tartalmazó cserék problémáiról.

4.1 Tétel [12] *A maximális méretű legfeljebb l hosszú köröket tartalmazó cserék problémája minden $l \geq 3$ egész esetén APX-nehéz.*

Ebből az eredményből nyilvánvalóan következik, hogy a maximális összsúlyú cserék problémája is legalább ennyire nehéz, hiszen ez utóbbi egy általánosabb probléma. Ez igazolja a közelítő algoritmusok vizsálatának fontosságát ezen problémák esetében.

A maximális összsúlyú legfeljebb l hosszú köröket tartalmazó cserék problémája visszavezethető a maximális összsúlyú legfeljebb l méretű halmazok pakolásának problémájára (amely ekvivalens módon tekinthető egy maximális összsúlyú párosítás keresési problémájának hipergráfokon). A következő közelíthetőségre vonatkozó eredményt Arkin és Hassin [4] látta be. Egy alternatív bizonyítás található Biró és Rizzi [12] munkájában, amely egy kevésbé általános lokális kereső algoritmuson alapszik.

4.2 Tétel (Ankin-Hassin 1998, [12]) *A maximális összsúlyú legfeljebb l méretű halmazok pakolásának problémája minden $\varepsilon > 0$ esetén közelíthető $l - 1 + \varepsilon$ faktorral.*

Mivel a vesecsere programokban a legjobb megoldás megtalálása valóban életbevágó feladat, ezért az egzakt megoldás megtalálása is igen fontos. A következő eredmény egy speciális exponenciális algoritmus következménye.

4.3 Tétel [12] *A maximális összsúlyú legfeljebb 3 hosszú köröket tartalmazó csere problémája megoldható* $O(2^{\frac{m}{2}})$ *időben (ahol* m *az irányított gráf éleinek számát jelöli).*

4.2. Stabil csere probléma

A stabil csere problémák egy családja a [9] cikkben került bemutatásra és elemzésre. Amint azt már említettük, a stabil csere probléma alapesetét, a házcsere játékot már Shapley és Scarf [34] megoldotta. Érdemes megjegyezni, hogy az ő definíciójuk arra az általánosabb esetre vonatkozott, amikor egy játékos két ház között indifferens is lehet. Ilyen esetben a gyengén stabil megoldás tekintendő mag-megoldásnak.

Cechlárová és társai [16] definiálták az úgynevezett $\mathcal{L}$*-preferenciákat.* Itt egy i játékos akkor preferál egy π permutációt egy másik σ permutációval szemben, ha vagy jobban tetszik neki az $\pi^{-1}(i)$ ház, mint a $\sigma^{-1}(i)$ ház, vagy indifferens közöttük, de a $C^{\pi}(i)$ kör hossza kisebb, mint a $C^{\sigma}(i)$ kör hossza. Az ilyen preferenciákon alapuló NTU-játékot *vesecsere játéknak nevezték.* A TTC algoritmus által kapott megoldás ebben az esetben is stabil marad. Természetesen merül fel viszont a kérdés, hogy a stabil megoldások közül ki lehet-e hatékonyan választani azt, amelyik a legnagyobb méretű. Biró és Cechlárová [10] belátta, hogy a stabil cserével lefedett játékosok számának maximalizálásának feladata $\mathcal{L}$-preferenciák esetében NP-nehéz (ezt a feladatot jelöli MAXCOVER-$\mathcal{L}$SE).

4.4 Tétel [10] MAXCOVER-$\mathcal{L}$SE *nem közelíthető* $n^{1-\varepsilon}$ *faktoron belül semmilyen* $\varepsilon > 0$*-ra, kivéve ha* $P = NP$*.*

A legfeljebb l hosszú köröket tartalmazó csrék problémáját vizsgálva, a blokkoló körök hosszára tett korlátozások szerint természetes módon kaphatunk új problémákat. Azt mondjuk, hogy egy csere *b-stabil,* ha a cserének nincsen legfeljebb b méretű blokkoló koalíciója. Biró [9], [6] a következő eredményeket látta be a 3-stabil, legfeljebb 3 hosszú köröket tartalmazó cserék problémájáról.

4.5 Tétel [9], [6] *A 3-stabil, legfeljebb 3 hosszú köröket tartalmazó cserék problémája NP-teljes.*

4.6 Tétel [9], [6] *A maximális méretű 3-stabil, legfeljebb 3 hosszú köröket tartalmazó cserék kereséséhez tartozó eldöntési probléma NP-teljes még három oldalú irányított gráfok esetében is (vagyis, ha* $V(D) = M \cup W \cup C$ *és minden* $(i, j) \in A(D)$ *él* $W \times M$*-ből vagy* $C \times W$*-ből vagy* $M \times C$*-ből való).*

Az alábbiakban kapcsolódó eredményeket gyűjtöttünk össze ismét egy táblázatban, ahol az eredményekhez megint [Ri] indexeket rendeltünk. A korábbiakban már említést tettünk néhány párosításokra vonatkozó eredményről, melyek ebben a táblázatba is bekerültek ([R2], [R3] és [R4] indexekkel). Shapley és Scarf [34] tétele a házcsere játék magjának létezéséről az [R5] indexet kapta. Irving [22] bizonyította be nemrégiben azt az állítást, hogy az úgynevezett ciklikusan stabil párosítások problémája (avagy a stabil páronkénti cserék problémája) NP-teljes [R6]. Ugyanez az állítás igazolható a 3-stabil páronkénti cserék esetében is [R7]. Végül, a ???-et tartalmazó rublikák olyan problémákhoz tartoznak, melyek nyitottak, de amelyek megoldása fontos lehet a gyakorlati alkalmazásokban. Ennek okait a táblázat alatt fejtjük ki részletesebben.

	$l =$	2-way exchange		3 hosszú kör		csere	
$b =$		szigorú	nem sz.	szigorú	nem sz.	szigorú	nem sz.
2-	létezik?	P [R2]	NPc [R3]	???		(Igen)	(Igen)
stabil	MAXCOVER	P	NPc [R4]			???	
3-	létezik?	NPc [R7]	(NPc)	**NPc (4.5)**	(NPc)	(Igen)	(Igen)
stabil	MAXCOVER	(NPc)	(NPc)	**NPc (4.6)**	(NPc)		
	létezik?	NPc [R6]	(NPc)	(NPc)	(NPc)	(Igen)	Igen [R5]
stabil	MAXCOVER	(NPc)	(NPc)	(NPc)	(NPc)	???	

A jelenlegi vesecsere programokban sok esetben a legfeljebb 3 hosszú köröket tartalmazó cserék jelentik a lehetséges megoldásokat, és ezen esetekben a páronkénti stabilitás természetes elvárásként fogalmazódhat meg a programmal szemben. Íly módon a 2-stabil, legfeljebb 3 hosszú köröket tartalmazó cserék problémája fontos nyitott kérdés lehet a gyakorlatban. Amennyiben nem teszünk megkötéseket a cserékben szereplő körök hosszára nézve, akkor a TTC algoritmus minden esetben egy stabil megoldást szolgáltat (amely egyben 2-stabil csere is természetesen). De a stabil cserével lefedett játékosok számának maximalizálási feladata ezen alapesetekben még megoldatlan.

Irodalom

[1] David J. Abraham, Péter Biró, and David F. Manlove. „Almost stable" matchings in the roommates problem. In *Approximation and online algorithms*, volume 3879 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 1–14. Springer, Berlin, 2006.

[2] Ron Aharoni and Tamás Fleiner. On a lemma of Scarf. *J. Combin. Theory Ser. B*, 87(1):72–80, 2003. Dedicated to Crispin St. J. A. Nash-Williams.

[3] Ahmet Alkan and David Gale. Stable schedule matching under revealed preference. *J. Econom. Theory*, 112(2):289–306, 2003.

[4] Esther M. Arkin and Refael Hassin. On local search for weighted packing problems. *Math. Oper. Res.*, 23:640–648, 1998.

[5] Mourad Baïou and Michel Balinski. The stable allocation (or ordinal transportation) problem. *Math. Oper. Res.*, 27(3):485–503, 2002.

[6] Péter Biró. *The stable matching problem and its generalizations: an algorithmic and game theoretical approach.* Dissertation, Budapest University of Technology and Economics, 2007.

[7] Péter Biró. *Stable b-matchings on graphs.* 2003. Master's thesis, Budapest University of Technology and Economics, (in Hungarian).

[8] Péter Biró. Higher education admission in Hungary by a "score-limit algorithm". *The 18th International Conference on Game Theory at Stony Brook University*, 2007.

[9] Péter Biró. Stable exchange of indivisible goods with restrictions. *Proceedings of the 5th Japanese-Hungarian Symposium*, pages 97–105, 2007.

[10] Péter Biró and Katarína Cechlárová. Inapproximability of the kidney exchange problem. *Inf. Process. Lett.*, 101(5):199–202, 2007.

[11] Péter Biró, Katarína Cechlárová, and Tamás Fleiner. The dynamics of stable matchings and half-matchings for the stable marriage and roommates problem. *Internat. J. Game Theory*, in print.

[12] Péter Biró and Romeo Rizzi. Maximum weight directed cycle packing problem in optimal kidney exchange programs. *(working paper)*, 2007.

[13] Yosef Blum, Alvin E. Roth, and Uriel G. Rothblum. Vacancy chains and equilibration in senior-level labor markets. *J. Econom. Theory*, 76(2):362–411, 1997.

[14] Yosef Blum and Uriel G. Rothblum. „Timing is everything" and marital bliss. *J. Econom. Theory*, 103(2):429–443, 2002.

[15] Katarína Cechlárová and Tamás Fleiner. On a generalization of the stable roommates problem. *ACM Trans. Algorithms*, 1(1):143–156, 2005.

[16] Katarína Cechlárová, Tamás Fleiner, and David F. Manlove. The kidney exchange game. *Proc. SOR'05*, Eds. L. Zadik-Stirn, S. Drobne:77–83, 2005.

[17] Effrosyni Diamantoudi, Eiichi Miyagawa, and Licun Xue. Random paths to stability in the roommate problem. *Games Econom. Behav.*, 48(1):18–28, 2004.

[18] J. Egerváry. Matrixok kombinatorius tulajdonságairól. *Matematikai és Fizikai Lapok*, 38:16–28, 1931.

[19] D. Gale and L. S. Shapley. College Admissions and the Stability of Marriage. *Amer. Math. Monthly*, 69(1):9–15, 1962.

[20] David Gale and Marilda Sotomayor. Some remarks on the stable matching problem. *Discrete Appl. Math.*, 11(3):223–232, 1985.

[21] Robert W. Irving. An efficient algorithm for the „stable roommates" problem. *J. Algorithms*, 6(4):577–595, 1985.

[22] Robert W. Irving. The cycle roommates problem: a hard case of kidney exchange. *Inf. Process. Lett.*, 103:1–7, 2007.

[23] Robert W. Irving and David F. Manlove. The stable roommates problem with ties. *J. Algorithms*, 43(1):85–105, 2002.

[24] Donald E. Knuth. *Mariages stables et leurs relations avec d'autres problèmes combinatoires.* Les Presses de l'Université de Montréal, Montreal, Que., 1976. Introduction à l'analyse mathématique des algorithmes, Collection de la Chaire Aisenstadt.

[25] L. Lovász. Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture. *Discrete Math.*, 2(3):253–267, 1972.

[26] David F. Manlove, Robert W. Irving, Kazuo Iwama, Shuichi Miyazaki, and Yasufumi Morita. Hard variants of stable marriage. *Theoret. Comput. Sci.*, 276(1-2):261–279, 2002.

[27] Boris G. Pittel and Robert W. Irving. An upper bound for the solvability probability of a random stable roommates instance. *Random Structures Algorithms*, 5(3):465–486, 1994.

[28] Eytan Ronn. NP-complete stable matching problems. *J. Algorithms*, 11(2):285–304, 1990.

[29] Alvin E. Roth. The evolution of the labor market for medical interns and residents: a case study in game theory. *Journal of Political Economy*, 6(4):991–1016, 1984.

[30] Alvin E. Roth and Marilda A. Oliveira Sotomayor. *Two-sided matching*, volume 18 of *Econometric Society Monographs.* Cambridge University Press, Cambridge, 1990. A study in game-theoretic modeling and analysis, With a foreword by Robert Aumann.

[31] Alvin E. Roth and John H. Vande Vate. Random paths to stability in two-sided matching. *Econometrica*, 58(6):1475–1480, 1990.

[32] Herbert E. Scarf. The core of an N person game. *Econometrica*, 35:50–69, 1967.

[33] L. S. Shapley and M. Shubik. The assignment game. I. The core. *Internat. J. Game Theory*, 1(2):111–130, 1972.

[34] Lloyd Shapley and Herbert Scarf. On cores and indivisibility. *J. Math. Econom.*, 1(1):23–37, 1974.

[35] Jimmy J. M. Tan. A necessary and sufficient condition for the existence of a complete stable matching. *J. Algorithms*, 12(1):154–178, 1991.

[36] Jimmy J. M. Tan and Yuang Cheh Hsueh. A generalization of the stable matching problem. *Discrete Appl. Math.*, 59(1):87–102, 1995.

[37] S. H. Tijs, T. Parthasarathy, J. A. M. Potters, and V. Rajendra Prasad. Permutation games: Another class of totally balanced games. *OR Spectrum*, 6:119–123, 1984.