Empirikus portfólió-stratégiák

Ottucsák György és Vajda István*

2006. június 16.

Kivonat

A cikk olyan új szekvenciális befektetési stratégiákat mutat be, amelyek általános feltételek mellett garantálják a befektető számára az aszimptotikusan optimális hozamszint elérését. A stratégiák analitikus és empirikus tulajdonságait is áttekintjük. Az analitikus eredmények rámutatnak arra, hogy a stratégiák aszimptotikus hozamszintje stacionárius és ergodikus piacokon egybeesik a log-optimális hozamszinttel, amelyet csak a piaci árakat generáló háttérfolyamat teljes együttes eloszlásának ismeretében érhetnénk el. Összehasonlítjuk az alkalmazott modellt a hagyományos Markowitz-féle portfólióelmélettel.

Journal of Economic Literature (JEL) kód: G11.

1. Bevezetés

A cikkben a pénzügyi piacokon alkalmazható szekvenciális befektetési (portfólióválasztási) stratégiákat mutatunk be. Szekvenciális stratégia alatt, olyan kauzális stratégiát értünk, amely a piacról rendelkezésre álló múltbeli adatokat használva, minden kereskedési periódus (nap) végén megváltoztathatja a portfóliót, azaz a tőkét újraoszthatja a rendelkezésre álló értékpapírok között. A befektető célja, hogy hosszútávon maximalizálja a vagyonát anélkül, hogy ismerné a részvényárfolyamokat generáló háttérfolyamat eloszlását. Szemben a klasszikus modellekkel, amelyek a piac működésének a leírására erős statisztikai feltételezéseket tesznek,

*A szerzők szeretnének köszönetet mondani Györfi Lászlónak a cikk többszöri alapos átolvasásért és hasznos tanácsaiért.

Ottucsák György a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem másodéves doktorandusz hallgatója, e-mail: `oti@szit.bme.hu` .

Vajda István a Budapesti Corvinus Egyetem másodéves doktorandusz hallgatója, e-mail: `vajda@szit.bme.hu` .

az ismertetett modellekben a matematikai vizsgálatok során használt egyetlen feltétel, az, hogy a napi hozamok stacionárius és ergodikus[1] folyamatot alkotnak. E feltétel mellett az aszimptotikus növekedési rátának (napi átlagos hozamszintnek) egy jól definiált maximuma van, amely elérhető a folyamat eloszlásának ismeretében (lásd Algoet és Cover [2]).

Léteznek univerzálisan konzisztens módszerek (pontos definíciót lásd 2. fejezetben), amelyek a fent említett aszimptotikusan optimális hozamszintet elérik, anélkül, hogy bármilyen előzetes ismeretük lenne a folyamat eloszlásáról, lásd Algoet [1], Györfi, Lugosi és Udina [15] és Györfi és Schäfer [16]. A cikkben áttekintjük azokat az univerzálisan konzisztens stratégiákat, amelyek nem csak az optimális aszimptotikus növekedési rátát garantálják stacionárius és ergodikus folyamatok esetén, hanem (véges idejű) szimulációk esetén is jó eredményt érnek el. A szimulációk során az algoritmus teljesítményét a New Yorki Értéktőzsde (NYSE) referencia adathalmazán vizsgálták.

A szimulációs eredmények alátámasztják, hogy a javasolt módszerek képesek megtalálni és hatékonyan kiaknázni, a részvényárak közötti rejtett és bonyolult összefüggéseket.

A cikk hátralévő részének a felépítése a következő. A 2. fejezetben bemutatjuk a log-optimális portfólió-stratégiát, áttekintjük az alkalmazott modellek matematikai hátterét és az ahhoz kapcsolódó eredményeket. A 3. fejezetben bemutatjuk a hisztogram, a magfüggvény és a legközelebbi szomszéd alapú becslőket, mint lehetséges portfólióválasztási stratégiákat. A 4. fejezetben összehasonlítjuk a log-optimális és Markowitz-féle portfólió stratégiát. Az 5. fejezetben összefoglaljuk a cikkben bemutatott eredményeket.

2. Matematikai modell

A cikkben vizsgált részvénypiaci modellt alkalmazta többek között Breiman [6], Algoet és Cover [2] és Cover [9]. Tegyük fel, hogy a piacon d darab részvény van, és a tőkénket minden nap elején szabadon újraoszthatjuk a részvények között. A vizsgálatok során nem használjuk a közgazdasági modellekben gyakran alkalmazott feltevést, hogy az egyik értékpapír kockázatmentes. Jelölje $\boldsymbol{x} = (x^{(1)}, \dots x^{(d)}) \in \mathbb{R}_+^d$ a hozamvektort, amelynek j-edik komponense, $x^{(j)} \geq 0$, a j-edik részvény záró árainak arányát fejezi ki az adott nap és azt követő nap között. Más szóval, $x^{(j)}$, azt mondja meg, hogy az adott nap végén a j-edik részvénybe fektetett egységnyi tőke mennyit ér a következő nap végén. $x^{(j)}$ tehát egy 1 körüli szám.

A befektető minden egyes kereskedési periódus elején diverzifikálja a tőkéjét

[1] Részletesen lásd: Medvegyev P.: Valószínűségszámítás, 12.5.2.fejezet.

egy $\boldsymbol{b} = (b^{(1)}, \dots b^{(d)})$ portfólióvektor szerint. A $\boldsymbol{b}$ j-edik komponense $b^{(j)}$, azt mondja meg, hogy a befektető a j-edik részvénybe tőkéjének hányad részét fekteti be. A cikkben feltesszük, hogy $\boldsymbol{b}$ portfólióvektor nem negatív komponensekből áll, amelyeknek az összege 1, azaz, $\sum_{j=1}^{d} b^{(j)} = 1$. Az utóbbi feltétel azt jelenti, hogy a befektetési stratégia önfinanszirozó, az előbbi pedig a rövidre eladási (short sale) üzleteket zárja ki. Jelölje S_0 a befektető kezdeti tőkéjét, ekkor a tőkéje egy nap múlva

$$S_1 = S_0 \sum_{j=1}^{d} b^{(j)} x^{(j)} = S_0 \langle \boldsymbol{b} \, , \, \boldsymbol{x} \rangle \, ,$$

ahol $\langle \cdot \, , \, \cdot \rangle$ a skalárszorzatot jelöli.

Hosszú idejű befektetések esetén a piac változását $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots \in \mathbb{R}_+^d$ hozamvektor sorozattal jellemezhetjük. $\boldsymbol{x}_i$ hozamvektor j-edik komponense $x_i^{(j)}$, azt mondja meg, hogy a j-edik részvénybe fektetett egységnyi tőke mennyit ér az i-edik nap végén. Minden $k \leq i$ esetén az $\boldsymbol{x}_k^i$ rövidítést használjuk a hozamvektorok $(\boldsymbol{x}_k, \dots, \boldsymbol{x}_i)$ sorozatára és jelölje Δ_d az összes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}_+^d$ nemnegatív komponensű vektor szimplexét, amely komponenseinek az összege 1. Egy $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots\}$ *befektetési stratégia* függvényeknek egy sorozata

$$\boldsymbol{b}_i : \left(\mathbb{R}_+^d\right)^{i-1} \to \Delta_d \, , \qquad i = 1, 2, \dots$$

úgy, hogy $\boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{x}_1^{i-1})$ jelöli a befektető által az i-edik napra a piac korábbi viselkedése alapján választott portfólióvektort. Az egyszerűség kedvéért a későbbiekben a következő jelölést használjuk $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}_1^{i-1}) = \boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{x}_1^{i-1})$.

Az S_0 kezdeti tőkéből kiindulva, n-edik nap végén a $\boldsymbol{B}$ befektetési stratégia tőkéje

$$S_n = S_0 \prod_{i=1}^{n} \left\langle \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}_1^{i-1}) \, , \, \boldsymbol{x}_i \right\rangle = S_0 e^{\sum_{i=1}^{n} \log \left\langle \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}_1^{i-1}) \, , \, \boldsymbol{x}_i \right\rangle} = S_0 e^{n W_n(\boldsymbol{B})},$$

ahol $W_n(\boldsymbol{B})$ az átlagos hozamszint (növekedési ráta)

$$W_n(\boldsymbol{B}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log \left\langle \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}_1^{i-1}) \, , \, \boldsymbol{x}_i \right\rangle \, .$$

Nyilvánvalóan, $S_n = S_n(\boldsymbol{B})$ maximalizálása ekvivalens $W_n(\boldsymbol{B})$ maximalizálásával.

A szekvenciális befektetések elméletében a piac viselkedésének modellezésére két fő megközelítés létezik. Az egyik, amikor a hozamvektor $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots$ tetszőleges értékeket vehet fel és nincsen sztochasztikus feltevésünk a részvényárakat generáló háttérfolyamatról, lásd például, Cover [9], Cover és Ordentlich [10], Singer [33], Hembold, Schapire, Singer, és Warmuth [19], Ordentlich és Cover [30], Vovk és Watkins [36], Blum és Kalai [4], Borodin, El-Yaniv, és Gogan [5], Cesa-Bianchi és Lugosi [7], Cross és Barron [11] és Stoltz és Lugosi [34]. Az ilyen $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots$ sorozatot individuálisnak is nevezik. Ennél a megközelítésnél az elért vagyont a referencia stratégiák (szakértők) egy osztályával hasonlítják össze. Például, Cover [9] a konstans újrasúlyozott portfóliók (Constantly Rebalanced Portfolios, CRP) osztályát vizsgálta, ahol $\boldsymbol{B}$ befektetési stratégiák $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}_1^{i-1})$ függvényei egyenlőek egy fix portfólióvektorral, mely független i-től és a múlttól $\boldsymbol{x}_1^{i-1}$-től is. Az adott periódusra a legjobb konstans újra súlyozott portfóliót csak utólag lehet meghatározni, tehát ez nem kauzális stratégia. Cover megmutatta, hogy létezik $\boldsymbol{B}$ befektetési stratégia (úgynevezett univerzális portfólió[2]), amelynek a teljesítménye ugyanolyan jó, mint a legjobb konstans újrasúlyozott portfólió teljesítménye a következő értelemben:

$$W_n(\boldsymbol{B}) \geq \max_{\boldsymbol{C} \in \mathcal{C}} W_n(\boldsymbol{C}) - \left(\frac{d-1}{2n} \log n + O\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

minden lehetséges $\boldsymbol{x}_1^n$ hozamvektorra, ahol $\mathcal{C}$ a konstans újrasúlyozott portfóliók osztálya. Vagyis ennek a nem előrelátó, azaz kauzális, startégiának az átlagos hozamszintje legfeljebb egy $\frac{d-1}{2n} \log n$-es hibatagban marad el a legjobb előrelátó (nem-kauzális) konstans újrasúlyozott portfólió növekedési rátájától. A fentebb említett referenciák ezt az eredményt terjesztették ki különbözőképpen.

A következő egyszerű példa demonstrálja a konstans újrasúlyozott portfóliók erejét [19].

1. PÉLDA. Legyen 2 részvény a piacon, az egyik kockázatmentes értékpapír, amelynek nincs hozama, illetve a másik egy nagy volatilitású részvény. Minden páros napon a részvény értéke megduplázódik és minden páratlanadik napon a részvény értéke megfeleződik. Az első értékpapír hozamvektora $1, 1, 1, \ldots$ a másodiké $\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \ldots$. Egyenként egyik értékpapír sem tudna 2-es faktornál nagyobb hozamot relizálni, de ha pénzünket egyenlően helyezzük el a két értékpapírban, azaz az egyenletes $\boldsymbol{b} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ portfóliót használjuk, akkor a exponenciális növekedést tudunk elérni. A páratlan napokon a vagyon csökkenése $\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ míg páros napokon a növekedés $\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{3}{2}$, azaz $2n$ nap után a hozam $\left(\frac{9}{8}\right)^n$.

A fenti megközelítés előnye, hogy nem használ a piac leírására bonyolult statisztikai modelleket és az eredmények minden lehetséges $\boldsymbol{x}_1^n$ sorozatra fennállnak. Ebből a szempontból ez a megközelítés nagyon robosztus, másfelől azonban nehéz

[2]Nem keverendő össze a későbbiekben bevezetésre kerülő univerzálisan konzisztens portfólió stratégiával.

követni a referencia osztályban lévő legjobb stratégia viselkedését. Például a legjobb konstans újrasúlyozott portfólió aszimptotikusan optimális, ha a $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ hozamvektor egy független azonos eloszlású (f.a.e.) valószínűségi változó vektorsorozatnak egy realizációja (lásd lentebb). Nem jól használható viszont, abban a valós piac működéshez jóval közelebb álló esetben, ha a különböző kereskedési periódusokban lévő hozamvektorok között erős, például Markov típusú, statisztikai függések vannak. Megoldásként a szakértőknek nagyobb referencia osztályait is vizsgálták, de hasonló korlátokba ütköztek (lásd, pl., Cover és Ordentlich [10], Singer [33] és Cross és Barron [11] kapcsolós portfóliója (switching portfolios)).

A másik, szokásos megközelítés, hogy feltesszük a hozamvektorról, hogy valamilyen statisztikai modellel leírható véletlen folyamatból származik. Ennek a klasszikus nézőpontnak az előnye az, hogy minden folyamat esetén elvileg meghatározható egy optimális stratégia (részletesen lásd később), amely függ a folyamat ismeretlen eloszlásától. Azonban, mind időben, mind a részvényárak között bonyolult függőségek lehetnek, amelyek nagyon megnehezítik a statisztikai modellek készítését.

A cikkben ötvözzük a fenti két megközelítést. Annak ellenére, hogy feltesszük, hogy a hozamvektor egy véletlen folyamat realizációja, nem tételezünk fel semmilyen paraméteres struktúrát az eloszlásról vagy az időbeli függésekről. Az általunk bemutatott modell nem-paraméteres statisztikán alapszik, az egyetlen feltevés, amit használunk, hogy a piac stacionárius és ergodikus, amely megenged tetszőlegesen komplex eloszlásokat. A vonatkozó eredmények fő üzenete, hogy léteznek nem-paraméteres befektetési stratégiák, amelyek hatékonyan feltárják a múltbeli adatokban lévő rejtett összefüggéseket, és ezeket kiaknázva képesek gyors vagyonnövekedést elérni.

2.1. Log-optimális portfólió

Tegyük fel, hogy $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots$ az $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots$ véletlen valószínűségi változók realizációja, amelyek egy vektor-értékű stacionárius és ergodikus folyamatot $\{\boldsymbol{X}_n\}_{-\infty}^{\infty}$ alkotnak. A fenti feltételek mellett vizsgálta pl. Breiman [6], Algoet és Cover [2], Algoet [1], Walk és Yakowitz [37], Györfi és Schäfer [16] és Györfi, Lugosi és Udina [15] a portfólióválasztási problémát.

Az [1]-ben és a [2]-ben meghatározott alapvető korlátok rámutattak, hogy az úgynevezett *log-optimális portfólió* $\boldsymbol{B}^* = \{\boldsymbol{b}^*(\cdot)\}$ a legjobb választás. Formálisan, az n-edik kereskedési periódusban jelölje $\boldsymbol{b}^*(\cdot)$ a log-optimális portfóliót:

$$\mathbb{E}\left\{\log\left\langle \boldsymbol{b}^*(\boldsymbol{X}_1^{n-1})\,,\,\boldsymbol{X}_n\right\rangle \Big|\,\boldsymbol{X}_1^{n-1}\right\} = \max_{\boldsymbol{b}(\cdot)} \mathbb{E}\left\{\log\left\langle \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}_1^{n-1})\,,\,\boldsymbol{X}_n\right\rangle \Big|\,\boldsymbol{X}_1^{n-1}\right\},$$

ahol $\mathbb{E}\{\cdot|\boldsymbol{X}_1^{n-1}\} = \mathbb{E}\{\cdot|\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_{n-1}\}$ a múltbeli hozamvektorok szerint vett feltételes várható értéket jelenti[3].

Ha általános esetben $S_n^* = S_n(\boldsymbol{B}^*)$ jelöli a $\boldsymbol{B}^*$ log-optimális portfólió-stratégiával elért tőkét n nap után, akkor minden tetszőleges $\boldsymbol{B}$ befektetési stratégia által elért $S_n = S_n(\boldsymbol{B})$ vagyonra és $\{\boldsymbol{X}_n\}_{-\infty}^{\infty}$ tetszőleges stacionárius és ergodikus folyamat esetén

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{S_n}{S_n^*} \leq 0 \quad \text{1 valószínűséggel} \tag{1}$$

és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log S_n^* = W^* \quad \text{1 valószínűséggel,}$$

ahol

$$W^* = \mathbb{E}\left\{ \max_{\boldsymbol{b}(\cdot)} \mathbb{E}\left\{ \log \left\langle \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}_{-\infty}^{-1}) \,,\, \boldsymbol{X}_0 \right\rangle \middle| \, \boldsymbol{X}_{-\infty}^{-1} \right\} \right\}$$

a log-optimális befektetési stratégia növekedési rátája.

Az (1) egyenlőtlenség alapötlete a következő. Tekintsünk egy tetszőleges $\boldsymbol{B}$ stratégiát és a hozzátartozó vagyont S_n-t, ekkor az átlagos napi hozamszintet bontsuk fel a következőképpen

$$\frac{1}{n}\log S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log \left\langle \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}_1^{i-1}) \,,\, \boldsymbol{X}_i \right\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \tag{2}$$

ahol

$$Z_i = \log \left\langle \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}_1^{i-1}) \,,\, \boldsymbol{X}_i \right\rangle - \mathbb{E}\left\{ \log \left\langle \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}_1^{i-1}) \,,\, \boldsymbol{X}_i \right\rangle \middle| \, \boldsymbol{X}_1^{i-1} \right\}$$

és

$$Y_i = \mathbb{E}\left\{ \log \left\langle \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}_1^{i-1}) \,,\, \boldsymbol{X}_i \right\rangle \middle| \, \boldsymbol{X}_1^{i-1} \right\}.$$

Ekkor $Z_1, Z_2, \ldots$ egy úgynevezett martingáldifferencia-sorozat[4], amelyre igen általános feltételek mellett

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0 \quad \text{1 valószínűséggel.}$$

Következésképpen $\frac{1}{n}\log S_n$ aszimptotikus viselkedését az $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ összetevő

[3]Részletesen lásd: Medvegyev P.: Valószínűségszámítás, Aula 2002, 9.1.3. fejezet.

[4]Részletesen lásd: Medvegyev P.:Valószínűségszámítás, Aula 2002, 9.2.3. fejezet.

viselkedése határozza meg. Ugyanakkor $\boldsymbol{b}^*$ definíciója miatt

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left\{\log\left\langle \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}_1^{i-1}),\, \boldsymbol{X}_i\right\rangle \Big|\, \boldsymbol{X}_1^{i-1}\right\} \\ &\le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \max_{\boldsymbol{b}(\cdot)} \mathbb{E}\left\{\log\left\langle \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}_1^{i-1}),\, \boldsymbol{X}_i\right\rangle \Big|\, \boldsymbol{X}_1^{i-1}\right\} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left\{\log\left\langle \boldsymbol{b}^*(\boldsymbol{X}_1^{i-1}),\, \boldsymbol{X}_i\right\rangle \Big|\, \boldsymbol{X}_1^{i-1}\right\},\end{aligned}$$

ami viszont az $\frac{1}{n}\log S_n^*$ aszimptotikus viselkedésének felel meg. Tehát nincsen olyan befektetési stratégia, amelynek aszimptotikusan nagyobb a hozamszintje, mint a log-optimális portfóliónak.

A $\boldsymbol{b}^*$ definíciójából következik, hogy f.a.e. piacok esetén $\boldsymbol{b}^*$ konstans és $W^* = \max_{\boldsymbol{b}} \mathbb{E}\left\{\log\left\langle \boldsymbol{b},\, \boldsymbol{X}_0\right\rangle\right\}$, ami azt mutatja, hogy ebben az esetben a log-optimális portfólió egybeesik a legjobb konstans újrasúlyozott portfólióval, Breiman [6], Kelly [20], Latané [21], Finkelstein és Whitley [13], Barron, Cover [3], Morvai [25, 26], Móri [27, 28] és Móri és Székely [29].

Tekintsük a 1. PÉLDÁ-nak egy sztochasztikus verzióját [9].

2. PÉLDA. Legyen $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ a hozamvektor és $\boldsymbol{b} = (b, 1-b)$ a portfólió vektor. Az egyik értékpapír hozama konstans 1, a másiké 2 vagy $\frac{1}{2}$ értéket vesz fel $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel. Formálisan $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1$ míg $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(X_2 = \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Tegyük fel továbbá, hogy $X_1, X_2, \ldots$ f.a.e. sorozat. Ekkor a log-optimális portfólióban az első értékpapír aránya:

$$\begin{aligned}b^* = \arg\max_b \mathbb{E}\log\left\langle (b, 1-b)\,,\, \boldsymbol{X}\right\rangle &= \arg\max_b \mathbb{E}\log(b + (1-b)X_2) \\ &= \arg\max_b \left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\log(2-b)\right) \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Azaz a log-optimális portfólió $\boldsymbol{b}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, amelynek a napi várhatóhozama:

$$\mathbb{E}\left\langle \boldsymbol{b}\,,\, \boldsymbol{X}\right\rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left\{X_2\right\} = \frac{9}{8}.$$

Természetesen, a log-optimális portfólió meghatározásához, a folyamat (végtelen dimenziós) eloszlásának teljes ismerete szükséges. A későbbiekben azokat a befektetési stratégiákat, amelyek aszimptotikusan elérik az optimális W^* hozamszintet az eloszlás ismerete nélkül *univerzálisan konzisztensnek* nevezzük. Pontosabban, egy $\boldsymbol{B}$ befektetési stratégiát univerzálisan konzisztensenk nevezünk az

$\{\boldsymbol{X}_n\}_{-\infty}^{\infty}$ stacionárius és ergodikus folyamatok egy osztályán, ha az osztályban minden folyamatra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log S_n(\boldsymbol{B}) = W^* \quad \text{1 valószínűséggel.}$$

2.2. Megjegyzések a log-optimális portfólióhoz

Számos közgazdász nem értett egyet a $\mathbb{E} \log S_n$, mint cél maximalizálásával, és többnyire a hasznosságelmélet oldaláról indítottak támadást a log-optimális portfólióválasztás ellen. Az eddigi általános feltételekkel szemben (stacionárius és ergodikus hozamok), ebben az alfejezetben jóval korlátozóbb feltételezéssel élünk, mégpedig, hogy a hozamok független azonos eloszlásúak. A kritikák e feltételek mellett születtek.

Egy tipikus kritika a következő. Tételezzük fel, hogy az egyes eszközök hozama független azonos eloszlást követ. Jelölje S_n a vagyont az n-edik periódus végén, továbbá legyen a hasznosság a következő módon adott:

$$U(S_n, \gamma) = S_n^\gamma/\gamma,$$

ahol $\gamma \neq 0$. Ahhoz, hogy a várható hasznosságot maximalizáljuk, minden egyes időpontban azonos portfóliót kell választanunk. Jelöljük $\boldsymbol{c}$-vel az $U(\cdot)$ hasznossági függvény várható értékét maximalizáló portfóliót és legyen $\boldsymbol{d}$ a log-optimális portfólió, azaz az a portfólió, ami maximalizálja a $\mathbb{E} \log S_n$ kifejezést tetszőleges n esetén.

Összehasonlítva a két portfólió teljesítményét az $U(\cdot)$ hasznossági függvény által meghatározott mértékben, adódik, hogy

$$\frac{\mathbb{E}\{U(S_n^{\boldsymbol{c}}, \gamma)\}}{\mathbb{E}\{U(S_n^{\boldsymbol{d}}, \gamma)\}} \to \infty,$$

ha $n \to \infty$, [31], ahol $S_n^{\boldsymbol{c}}$ az n-edik napig elért vagyona a $\boldsymbol{c}$ stratégiának.

Ennél valamivel komolyabb ellenérv, de még mindig ugyanazon gondolat ismétlésének tekinthető a következő, Merton és Samuelson szerzőpárostól [8] származó kritika. A szerzők megmutatták, hogy a log-optimális portfólió még közelítőleg sem lesz optimális *kezdeti vagyon egyenértékes értelemben*. Jelölje

$$\pi_{\boldsymbol{ef}}(n, S_0) \stackrel{\text{def}}{=} \pi_{\boldsymbol{ef}}$$

az $\boldsymbol{f}$ stratégia kezdeti vagyon egyenértékesét az $\boldsymbol{e}$ stratégiához viszonyítva, ha

$$\mathbb{E}\left\{U(\pi_{\boldsymbol{ef}} S_n^{\boldsymbol{e}}, \gamma)\right\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left\{U(S_n^{\boldsymbol{f}}, \gamma)\right\},$$

feltéve, hogy $S_0 = 1$. Legyen $\boldsymbol{e}$ a log-optimális stratégia. Jelölje $\boldsymbol{f}$ az $U(x,\gamma) = x^\gamma/\gamma$ ($\gamma < 1$) hasznossági függvény esetén a várható hasznosságot maximalizáló stratégiát. A log-optimális stratégia „közelítőleg" optimális ebben a módosított értelemben, ha $\lim_{n\to\infty} \pi_{\boldsymbol{ef}}(n, S_0) = 1$ és $\pi_{\boldsymbol{ef}}$ az idő csökkenő függvénye.

Tekintve az $U(x,\gamma) = x^\gamma/\gamma$, ($\gamma < 1$) hasznossági függvényt

$$\mathbb{E}\{U(S_n^{\boldsymbol{f}}, \gamma)\} = \frac{\mathbb{E}\{(S_n^{\boldsymbol{f}})^\gamma\}}{\gamma} = \frac{(\mathbb{E}\{(S_1^{\boldsymbol{f}})^\gamma\})^n}{\gamma} \tag{3}$$

adódik. Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\left\{U\left(\pi_{\boldsymbol{ef}} S_n^{\boldsymbol{e}}, \gamma\right)\right\} = \frac{\mathbb{E}\{(\pi_{\boldsymbol{ef}} S_n^{\boldsymbol{e}})^\gamma\}}{\gamma} = \frac{\pi_{ef}^\gamma(\mathbb{E}\{(S_1^{\boldsymbol{e}})^\gamma\})^n}{\gamma}. \tag{4}$$

Vizsgáljuk $\gamma \neq 0$-át, ekkor (3)-ból és (4)-ből azt kapjuk, hogy

$$\pi_{\boldsymbol{ef}} = \lambda(\gamma)^{n/\gamma},$$

ahol

$$\lambda(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{E}\{(S_1^{\boldsymbol{f}})^\gamma\}}{\mathbb{E}\{(S_1^{\boldsymbol{e}})^\gamma\}}.$$

Így azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \pi_{\boldsymbol{ef}}(n, S_0) = \infty.$$

és

$$\frac{\partial \pi_{\boldsymbol{ef}}(n, S_0)}{\partial n} > 0.$$

Tehát a log-optimális stratégia nem optimális ebben a módosított értelemben.

Az ilyen jellegű kritikákkal az a probléma, hogy figyelmen kívül hagyják azt a tényt, hogy a $\mathbb{E}\log S_n$-t nem hasznossági megfontolások miatt kell maximalizáljuk, hanem a kedvező aszimptotikus tulajdonságai miatt. Vegyük észre, hogy az egyes befektetők hasznosságától függetlenül pénzben kifejezve 1 valószínűséggel a legnagyobb vagyont fogja biztosítani aszimptotikusan. Ugyanakkor, ha már a logaritmus függvényt hasznossági függvénynek akarjuk tekinteni, akkor ne várjuk el, hogy a log-optimális stratégia egy logaritmustól különböző hasznossági függvény szerinti várható hasznosságot is maximalizáljon.

Maga Markowitz is olyan metakritérium megtalálásán fáradozott, ami a várható hasznosság megszállottjait is meggyőzi a log-optimális portfóliók aszimptotikus optimalitásáról. Hitte, hogy a Neumann és Morgenstern által bevezetett várható hasznosság maximalizálás az üdvőzítő út az optimális portfólió kiválasztására. Amely, nem túl szigorú feltételek mellett a log-optimális portfóliók optimalitását is igazolta [24].

Tételezzük fel, hogy minden időpontban azonosak a befektetési lehetőségek, vagyis a hozamok független azonos eloszlásúak.

A hasznossági függvénnyel kapcsolatban Markowitz csak egy kikötést tesz: ha egy $\boldsymbol{C}$ stratégiából származó vagyonsorozat $S^{\boldsymbol{C}} = (S_0, S_1^{\boldsymbol{C}}, S_2^{\boldsymbol{C}}, \dots)$ és egy $\boldsymbol{D}$ stratégiából származó vagyonsorozat $S^{\boldsymbol{D}} = (S_0, S_1^{\boldsymbol{D}}, S_2^{\boldsymbol{D}}, \dots)$ esetén az $S^{\boldsymbol{C}}$ sorozat minden eleme nagyobb, mint az $S^{\boldsymbol{D}}$ sorozat minden eleme egy bizonyos n után, akkor $U(S^{\boldsymbol{C}}) \geq U(S^{\boldsymbol{D}})$.

Ezen két fentebbi feltételezés biztosítani fogja a log-optimális portfólióválasztás felsőbbrendűségét, amit Markowitz következőképp bizonyít.

Jelölje y_i a $\log(1 + r_i)$-t vagyis a logszázalékos hozamot. Jelölje $\boldsymbol{C}$ a log-optimális stratégiát és legyen $\boldsymbol{D}$ egy tetszőleges másik stratégia. A log-optimális stratégia definíciójából adódik, hogy $\mathbb{E}(y_n^{\boldsymbol{C}}) > \mathbb{E}(y_n^{\boldsymbol{D}})$, minden n-re. Feltehetjük, hogy az $y_1, y_2, \dots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók véges μ várható értékkel, így

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu) = 0 \quad \text{1 valószínűséggel},$$

vagy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i = \mu \quad \text{1 valószínűséggel}.$$

Mivel $\mathbb{E}(y_n^{\boldsymbol{C}}) > \mathbb{E}(y_n^{\boldsymbol{D}})$, ezért adódik, hogy

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i^{\boldsymbol{C}} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i^{\boldsymbol{D}},$$

ahol $n \geq N(\omega)$ majdnem minden $\omega \in \Omega$ realizáció esetén. Alkalmazva $y_i = \log(1 + r_i)$-t kapjuk, hogy

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(1 + r_i^{\boldsymbol{C}}) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(1 + r_i^{\boldsymbol{D}})$$

minden $n \geq N(\omega)$-ra, majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén. Így,

$$S_n^{\boldsymbol{C}} \geq S_n^{\boldsymbol{D}}$$

minden $n \geq N(\omega)$-ra majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén.

Innen a hasznossági függvényre tett feltételezésből adódik, hogy

$$U(S_0, S_1^{\boldsymbol{C}}, S_2^{\boldsymbol{C}}, \dots) \geq U(S_0, S_1^{\boldsymbol{D}}, S_2^{\boldsymbol{D}}, \dots) \quad \text{1 valószínűséggel}$$

és így

$$\mathbb{E}U(S^{\boldsymbol{C}}) \geq \mathbb{E}U(S^{\boldsymbol{D}}).$$

3. Univerzálisan konzisztens empirikus befektetési stratégiák

Meglepő tény, hogy létezik univerzális stratégia a stacionárius és ergodikus folyamatok tetszőleges osztálya esetén, amit Algoet [1] bizonyított. Algoet konstrukciója azonban elég komplex és az elméleti jelentősége ellenére, kicsi a gyakorlati értéke. Algoet bevezetett egy egyszerűbb sémát is és vázlatosan bizonyította univerzális konzisztenciáját, amelynek teljes bizonyítását végül Györfi és Schäfer [16] adta meg.

A következőkben három univerzálisan konzisztens portfólió stratégiát mutatunk be, amelyek alapjait az alakfelismerés és a nemparaméteres regresszióbecslés témakörében jól ismert módszerek adják: a *particiós becslő*, a *magfüggvény alapú becslő* és a *legközelebbi szomszéd becslő*. Mind három stratégia alapötlete, hogy a közeli múlthoz „hasonló mintázatokat” keres a múltban és ezek alapján készít becslést a másnapi részvényárfolyamokra, amely alapján maximalizálja a portfolióját (a három stratégia közötti különbség éppen a hasonlóság definíciójában van). A stratégiák alapjainak részletesebb leírása megtalálható [12] 9., 10. és 11. fejezetében és [14] 4., 5. és 6. fejezetében.

3.1. Hisztogram alapú stratégia

Bemutatjuk Algoet sémájának Györfi és Schäfer féle verzióját, az úgynevezett *hisztogram alapú befektetési* stratégiát, mint a korábban említett portfólióválasztási stratégiák egy speciális esetét. Jelölje $\boldsymbol{B}^H$ a *hisztogram alapú befektetési* stratégiát.

$\boldsymbol{B}^H$ konstrukciója a következő. Először definiáljuk az elemi stratégiáknak (szakértőknek) egy végtelen osztályát $\boldsymbol{H}^{(k,\ell)} = \{\boldsymbol{h}^{(k,\ell)}(\cdot)\}$-t, ahol k és ℓ indexek pozitív egészek, $k, \ell = 1, 2, \ldots$.

Egy $\boldsymbol{H}^{(k,\ell)}$ szakértő esetén k a mintaillesztési ablakméretét (lásd alább), míg ℓ a kvantálás finomságát adja meg. Legyen $\mathbb{R}_+^d$-nek egy partíciója, $\mathcal{P}_\ell = \{A_{\ell,j}\}$, ahol $j = 1, 2, \ldots, m_\ell$, amely m_ℓ darab diszjunkt halmazból (cellából) áll. A $\boldsymbol{H}^{(k,\ell)}$ szakértő ahhoz, hogy meghatározza a portfólióját az n-dik napon, az utolsó k nap hozamvektorát veszi alapul. Diszkretizálja (kvantálja) $\mathcal{P}_\ell$ partíció szerint a kd dimenziós „múlt” vektort és meghatározza azt a portfólióvektort, ami optimális azokon a múltbeli napokon, amelyeknek a kvantált k hosszú múltja egybeesik a mostanival. Formálisan, jelölje G_ℓ a $\mathcal{P}_\ell$ partícióhoz tartozó diszkretizáló függvényt, azaz

$$G_\ell(\boldsymbol{x}) = j, \text{ ha } \boldsymbol{x} \in A_{\ell,j} \ .$$

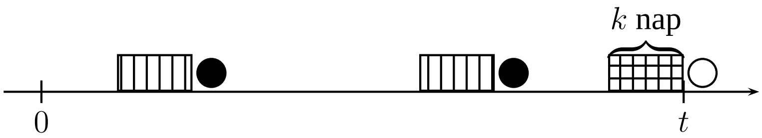
Vezessük be a következő egyszerűsítő jelölést minden n-re és $\boldsymbol{x}_1^n \in \mathbb{R}^{dn}$-re, jelentse $G_\ell(\boldsymbol{x}_1^n)$ a $G_\ell(\boldsymbol{x}_1), \ldots, G_\ell(\boldsymbol{x}_n)$ sorozatot. Ezután definiáljuk a $\boldsymbol{H}^{(k,\ell)} =$

$\{\boldsymbol{h}^{(k,\ell)}(\cdot)\}$ szakértőt

$$\boldsymbol{h}^{(k,\ell)}(\boldsymbol{x}_1^{n-1}) = \arg\max_{\boldsymbol{b}\in\Delta_d} \prod_{\left\{k<i<n: G_\ell(\boldsymbol{x}_{i-k}^{i-1}) = G_\ell(\boldsymbol{x}_{n-k}^{n-1})\right\}} \langle \boldsymbol{b}\,,\,\boldsymbol{x}_i\rangle\ , \tag{5}$$

minden $n > k+1$-re, ha a szorzat nem üres, különben pedig válasszuk az egyenletes $\boldsymbol{b}_0 = (1/d,\ldots,1/d)$ portfóliót. Tehát $\boldsymbol{h}_n^{(k,\ell)}$ diszkretizálja $\boldsymbol{x}_1^{n-1}$ szekvenciát a $\mathcal{P}_\ell$ partíció szerint és megkeresi az összes egyezést a múltban az utoljára látott $G_\ell(\boldsymbol{x}_{n-k}^{n-1})$ k hosszú kvantált sorozattal. Ezután kiválasztja azt a fix portfólióvektort, ami maximalizálja a kifizetést a kvantált sorozatok után következő napokon.

A 3.1. ábra foglalja össze a stratégia csúszó ablakos működését. A vonalkázott téglalapok a múltbeli k hosszú minta-egyezéseket jelentik. A teli karikák a múltbeli minta-egyezéseket követő napi hozamok, ami alapján az üres karikára, azaz a holnapi hozamra ad becslést a stratégia.



1. ábra. Csúszó időablak szemléltetése.

A $\boldsymbol{B}^H$ hisztogram alapú stratégiát a $\boldsymbol{H}^{(k,\ell)}$ szakértők kombinálásával kapjuk, felhasználva egy $\{q_{k,\ell}\}$ valószínűségi eloszlást, amely minden pozitív egész pár (k,ℓ) halmazán értelmezett úgy, hogy k,ℓ, $q_{k,\ell} > 0$. $\boldsymbol{B}^H$ stratégia a $\boldsymbol{H}^{(k,\ell)}$ szakértők egyszerű súlyozása a múltbeli teljesítményük alapján a következőképpen: a befektető vagyona a n-dik nap után

$$S_n(\boldsymbol{B}^H) = \sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_n(\boldsymbol{H}^{(k,\ell)}), \tag{6}$$

ahol $S_n(\boldsymbol{H}^{(k,\ell)})$ az n-edik nap után összegyűlt vagyont jelenti, amikor $\boldsymbol{H}^{(k,\ell)}$ portfólió stratégiát használja és a kezdeti tőke $S_0 = 1$. Az S_0 kezdeti tőkét $\boldsymbol{H}^{(k,\ell)}$ szakértők között a $q_{k,\ell}$ valószínűségi eloszlás szerint osztjuk szét, azaz $q_{k,\ell}S_0$. [16]-ban megmutatták, hogy $\boldsymbol{B}^H$ stratégia univerzálisan konzisztens az ergodikus folyamatoknak minden olyan osztályra, amelyre igaz $\mathbb{E}\{|\log X^{(j)}|\} < \infty$ $j = 1,2,\ldots,d$ esetén és a kvantáláshoz használt partíciók teljesítik az alábbi két tulajdonságot:

(a) a partíciók sorozata finomodó, azaz, $\mathcal{P}_{\ell+1}$ minden cellája egy részhalmaza $\mathcal{P}_\ell$ partíció megfelelő cellájának, $\ell = 1,2,\ldots$ és

(b) ha $\mathrm{diam}(A) = \sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A} \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ jelöli a halmaz átmérőjét, akkor minden origó középpontú gömb $S \subset \mathbb{R}^d$ esetén

$$\lim_{\ell\to\infty} \max_{j: A_{\ell,j}\cap S\neq\emptyset} \mathrm{diam}(A_{\ell,j}) = 0\,.$$

3.2. Szakértők kombinálása

Az előbb bemutatott empirikus stratégia alapötlete a szakértők (portfóliók) kombinálása, azaz

$$S_n(\boldsymbol{B}) = \sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_n(\boldsymbol{H}^{(k,\ell)}),$$

és az univerzális konzisztenciához azt kell megmutatni, hogy

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log S_n(\boldsymbol{B}) \geq W^* \quad \text{1 valószínűséggel.}$$

A bizonyítás két lépésből áll. Először azt kell belátni, hogy a kombinált portfólió és a portfólióstratégia osztályban lévő legjobb portfólió között szoros kapcsolat van. Második lépés annak a megmutatása, hogy a portfólió stratégia osztályban a legjobb portfólió univerzálisan konzisztens. Az első lépés gondolatmenete a következő

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log S_n(\boldsymbol{B}) &= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_n(\boldsymbol{H}^{(k,\ell)}) \right) \\
&\geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left(\sup_{k,\ell} q_{k,\ell} S_n(\boldsymbol{H}^{(k,\ell)}) \right) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{k,\ell} \left(\log q_{k,\ell} + \log S_n(\boldsymbol{H}^{(k,\ell)}) \right) \\
&\geq \sup_{k,\ell} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log S_n(\boldsymbol{H}^{(k,\ell)}),
\end{aligned}$$

ezért az előzőekben taglalt stratégiák esetén azt kell megmutatni, hogy

$$\sup_{k,\ell} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log S_n(\boldsymbol{H}^{(k,\ell)}) \geq W^* \quad \text{1 valószínűséggel.}$$

3.3. Magfüggvény alapú stratégia

Györfi, Lugosi, Udina [15] vezette be a magfüggvény alapú stratégiát, amelynek egy egyszerűbb, az egyenletes magfüggvényhez tartozó, „mozgó ablakos” verzióját ismertetjük.

Ugyanúgy, mint az előző alfejezetben, a stratégiához definiáljuk a szakértők egy végtelen osztályát $\boldsymbol{H}^{(k,\ell)} = \{\boldsymbol{h}^{(k,\ell)}(\cdot)\}$-t, ahol k és ℓ pozitív egészek.

Minden fix k, ℓ pozitív egészhez válasszunk egy sugarat, amire igaz $r_{k,\ell} > 0$ úgy, hogy minden fix k-ra

$$\lim_{\ell\to\infty} r_{k,\ell} = 0 \, .$$

Ekkor minden $n > k+1$ esetén definiáljuk $\boldsymbol{h}^{(k,\ell)}$ szakértőt a következőképpen

$$\boldsymbol{h}^{(k,\ell)}(\boldsymbol{x}_1^{n-1}) = \arg\max_{\boldsymbol{b}\in\Delta_d} \prod_{\left\{k<i<n:\|\boldsymbol{x}_{i-k}^{i-1}-\boldsymbol{x}_{n-k}^{n-1}\|\le r_{k,\ell}\right\}} \langle \boldsymbol{b}\,,\, \boldsymbol{x}_i\rangle\ ,$$

ha a szorzat nem üres, különben pedig válasszuk az egyenletes $\boldsymbol{b}_0 = (1/d, \ldots, 1/d)$ portfóliót. Az algoritmus azokat a mintákat tekinti hasonlónak, amelyeknek az euklédeszi távolsága kisebb egy meghatározott $r_{k,\ell}$ sugárnál.

A szakértőket a hisztogram alapú stratégia esetén bemutatott módon kombináljuk, (6) szerint.

Györfi, Lugosi, Udina [15] bebizonyította, hogy $\boldsymbol{B}^K$ portfóliósémа univerzálisan konzisztens az ergodikus folyamatok azon osztályára, amelyre igaz $\mathbb{E}\{|\log X^{(j)}|\} < \infty$ $j = 1, 2, \ldots, d$.

3.4. Legközelebbi szomszéd alapú stratégia

A korábbiakhoz hasonlóan definiáljuk a szakértők egy végtelen osztályát $\boldsymbol{H}^{(k,\ell)} = \{\boldsymbol{h}^{(k,\ell)}(\cdot)\}$-t, ahol $0 < k,\ \ell$ egészek. Jelölje k a mintaillesztési ablak hosszát és minden ℓ-hez válasszuk $q_\ell \in (0,1)$-t úgy, hogy

$$\lim_{\ell\to\infty} q_\ell = 0. \tag{7}$$

Legyen

$$\hat{\ell} = \lfloor q_\ell n \rfloor .$$

Minden adott napon a szakértő megkeresi $\hat{\ell}$ legközelebbi szomszédot a múltban. k, ℓ ($n > k + \hat{\ell} + 1$) fix pozitív egészekre vezessük be az $\hat{\ell}$ legközelebbi szomszéd (LSZ) halmazát:

$$\hat{J}_n^{(k,\ell)} = \left\{ i;\ k+1 \le i \le n \text{ úgy, hogy } \boldsymbol{x}_{i-k}^{i-1} \text{ benne van } \boldsymbol{x}_{n-k}^{n-1}\ \hat{\ell} \text{ LSZ-ja között} \right\} .$$

Legyen $h^{k,\ell}$ szakértő definíciója

$$h^{(k,\ell)}(\boldsymbol{x}_1^{n-1}) = \arg\max_{\boldsymbol{b}\in\Delta_d} \prod_{\left\{i\in\hat{J}_n^{(k,\ell)}\right\}} \langle \boldsymbol{b}\,,\, \boldsymbol{x}_i\rangle\,.$$

Azaz, $\boldsymbol{h}_n^{(k,\ell)}$ szakértő egy fix portfólió vektor, amelyet a legközelebbi szomszédok előfordulását követő napokra nézve optimális.

A szakértők kombinálása ugyanúgy történik, mint korábbi két stratégia esetén (lásd (6)).

Györfi, Udina és Walk [17]-ben bebizonyította, hogy a $\boldsymbol{B}^{NN}$ portfóliósémа univerzálisan konzisztens az ergodikus folyamatoknak azon osztályára, amelyre igaz $\mathbb{E}\{|\log X^{(j)}|\} < \infty$ $j = 1, 2, \ldots, d$.

3.5. Kisérletek a NYSE adatokon

A bemutatott univerzálisan konzisztens portfólió-stratégiákat a New-Yorki Értéktőzsde (NYSE) standard adatsorán tesztelték, amelyet többek között Cover [9], Singer [33], Hembold, Schapire, Singer és Warmuth [19], Blum és Kalai [4], Borodin, El-Yaniv, és Gogan [5], is használt empirikus vizsgálataihoz. Az adatsor 36 részvény napi árait tartalmazza egy 22 év hosszú perióduson (5651 kereskedési napon) keresztül 1962-től 1984-ig.

Vizsgálatok során a következő feltételezésekkel élnek, amelyeket az ismert közgazdazdasági modellek is alkalmaznak (lásd pl. Markowitz [22] és Sharpe [32]):

- a részvények korlátlanul oszthatók,
- a részvényekből korlátlan mennyiség áll a rendelkezésünkre az aktuális (napi) áron, azaz tetszőlegesen kevés vagy sok részvényt tudunk venni vagy eladni,
- nincs tranzakciós költség és
- a befektető infinitezimális, azaz a befektető akciói nincsenek hatással a piac viselkedésére (ez a feltevés, akkor realisztikus, ha a befektetett vagyon kicsi a piac kereskedési volumenjéhez képest).

A szimulációk során ([15], [17]) elért látványos vagyon növekedést (pl. több, mint 10^{12}-enes növekedési faktor 22 év alatt a New-Yorki Értéktőzsdén) körültekintően kell interpretálni, mivel a gyors növekedés a valós piacokon elkerülhetetlenül maga után vonna számos reakciót, melyet sem az elméleti, sem a gyakorlati modellek nem tudnak leírni. Az egyszerűsítések ellenére úgy gondoljuk, hogy a numerikus eredmények erős empirikus bizonyítékot nyújtanak arra, hogy a részvénypiac nem hatékony. Ezt részben azzal magyarázhatjuk, hogy annak ellenére, hogy a javasolt modell csak publikus adatok használt, az általa feltárt piaci összefüggések elég komplexek ahhoz, hogy a legtöbb kereskedő számára rejtve maradjanak.

A következőkben négy részvénypáron végzett szimulációk eredményét mutatjuk be [15], [17]. Az eredményeket az 1. táblázat foglalja össze. A gyakorlatban minden szimuláció esetén a szakértők végtelen nagy osztálya helyett csak egy véges 50 szakértőből álló osztályt használtak. A szakértők paraméterei $k = 1, \dots, K$ és $\ell = 1, \dots, L$, ahol $K = 5$ és $L = 10$.

A táblázat második oszlopában található a két részvény közül a jobbik által elért vagyon, a legjobb konstans újrasúlyozott portfólióval, egy orákulummal (ez a legjobb lehetséges stratégia, amely minden napon a jobb, magasabb hozamú, részvénybe fekteti a vagyont), illetve Cover-féle univerzális portfólióval (UP) és

Részvények					Legj.sz. $[k, \ell]$
Iroquois	Legj. részv.	8.92	$\boldsymbol{B}^H$	2.3e+10	1.39e+11 [1,1]
Kin Ark	BCRP	73.70	$\boldsymbol{B}^K$	4.03e+10	9.01e+11 [2,2]
	Orákulum	6.85e+53	$\boldsymbol{B}^{NN}$	1.15e+12	1.44e+13 [2,8]
	Cover UP	39.97			
	Singer AKP	143.7			
Com. Met.	Legj. részv.	52.02	$\boldsymbol{B}^H$	162.5	327.8 [2,1]
Mei. Corp	BCRP	103.0	$\boldsymbol{B}^K$	775.1	4749 [2,5]
	Orákulum	2.12e+35	$\boldsymbol{B}^{NN}$	3505	3.14e+4 [3,6]
	Cover UP	74.08			
	Singer AKP	107.7			
Com. Met.	Legj. részv.	52.02	$\boldsymbol{B}^H$	1.33e+10	8.54e+10 [1,1]
Kin Ark	BCRP	144.0	$\boldsymbol{B}^K$	1.11e+11	1.41e+12 [3,3]
	Orákulum	1.84e+49	$\boldsymbol{B}^{NN}$	4.78e+12	8.25e+13 [3,7]
	Cover UP	80.54			
	Singer AKP	206.7			
IBM	Legj. részv.	13.36	$\boldsymbol{B}^H$	63.8	112.2 [1,5]
Coca-Cola	BCRP	15.02	$\boldsymbol{B}^K$	47.6	194.6 [1,6]
	Orákulum	1.08e+15	$\boldsymbol{B}^{NN}$	74.3	296.3 [1,7]
	Cover UP	14.24			
	Singer AKP	15.05			

1. táblázat. Különböző befektetési stratégiákkal elért vagyon a Cover [9] által használt NYSE részvénypárokon.

a Singer-féle adaptív kapcsolgatós portfólióval (AKP) elért vagyonnövekedés. A harmadik oszlop tartalmazza a korábban bemutatott három univerzálisan konzisztens stratégiával: a hisztogram ($\boldsymbol{B}^H$), a magfüggvény ($\boldsymbol{B}^K$) és a legközelebbi szomszéd ($\boldsymbol{B}^{NN}$) alapú befektetési stratégiákkal elért vagyont. Az összes esetben $K = 5$ és $L = 10$. Az utolsó oszlopban a $K \times L$ darab szakértő közül a legjobb szakértő vagyonát és hozzá tartozó paraméterek indexei vannak felsorolva.

4. A log-optimális és Markowitz-féle portfólióelmélet kapcsolata

Ebben a fejezetben párhuzamot vonunk a log-optimális befektetés és a Markowitz-féle portfólió-választás között. Első pillanatra ez több okból is meglepő lehet.

A Markowitz-féle portfólió-választás a várható érték és a variancia kettősére vonatkozó preferenciák alapján rangsorolja a portfóliókat. A várható hasznosság oldaláról ez a következőképpen interpretálható. Tekintsünk egy CARA tipusú (konstans abszolút kockázatkerülési hajlandósággal rendelkező) hasznossági függvényt. Legyen ez az $U(x) = -e^{-kx}$ függvény, ahol $-\frac{U''(x)}{U'(x)} = k$ az abszolút kockázatkerülés mértéke. Ismert, hogy ha $x \sim N(\mu, \sigma)$, akkor a $\mathbb{E}U$ helyett a $V(\mu, \sigma) = \mu - \frac{1}{2}k\sigma^2$ kifejezést vizsgálhatjuk.

Ha a log-optimális portfólióválasztást a logaritmikus hasznosság maximalizálásaként fogjuk fel, akkor ez nem más mint egy $U(x, \gamma) = \frac{1}{\gamma}(x^\gamma - 1)$ CRRA (konstans relatív kockázatkerülési hajlandóság) tipusú hasznossági függvény $\gamma \to 0$ helyen vett várható értékének a maximalizálása (ha $\gamma \to 0$, akkor $U(x, \gamma) \to \log(x)$). Következésképp egy konstans abszolút kockázatkerülési hajlandóságú függvény vetünk össze egy nem konstans abszolút kockázatkerülési hajlandóságúval.

A következő érveink vannak arra, hogy mégis indokolt az összehasonlítás.

A két portfólió-választási szabály azonos logikáját igazolja a log-optimális portfólió-választás később definiálandó implicit kockázatkerülő tulajdonsága is. Másrészt, alább megmutatjuk, hogy kvadratikus közelítést alkalmazva, a log-optimális portfólió-választásra egy a várható értéktől pozitívan és a varianciától negatívan függő kifejezést kapunk, hasonlóan a markowitz-i portfólió-választáshoz.

Markowitz a modern portfólióelméletet megalapozó 1952-es cikkében [22]-ben rámutatott arra, hogy a várható hozam maximalizálása hosszútávon nem hozhat eredményt a piacon, mivel figyelmen kívül hagyja a diverzifikáció elvét (ekkor az összes vagyon egyetlen részvénybe invesztálódik). Javaslata az volt, hogy a részvényekben rejlő kockázatot is figyelembe kell venni a várható hozam mellett. A kockázat jellemzésére a hozamok varianciáját használta. Értelemszerűen az azonos várható hozamú értékpapírok között a racionális befektető a kisebb szórásút, míg azonos variancia mellett a nagyobb várható értékűt preferálja.

A log-optimális portfólió hasonló tulajdonságát vizsgálta Vajda [35]-ben. Vezessük be a implicit kockázatkerülés fogalmát. Egy $\boldsymbol{g}$ portfólió stratégiára azt mondjuk, hogy c szinten implicit kockázatkerülő, hogy ha két $\boldsymbol{b}_1$ és $\boldsymbol{b}_2$ portfólió közül, amelyekre teljesül, hogy

$$\mathbb{E}\left\langle \boldsymbol{b}_1\,,\,X\right\rangle = \mathbb{E}\left\langle \boldsymbol{b}_2\,,\,X\right\rangle,$$

és

$$\mathbf{Var}\left\langle \boldsymbol{b}_1\,,\,X\right\rangle = \mathbf{Var}\left\langle \boldsymbol{b}_2\,,\,X\right\rangle + c,$$

ahol $c \geq 0$, akkor

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{b}_1, X) \leq \boldsymbol{g}(\boldsymbol{b}_2, X).$$

Ekkor belátható, hogy a log-optimális portfólió implicit kockázatkerülő

$$c = 2\max_i \mathbb{E}\left\{|X^{(i)} - 1|^3\right\}$$

paraméterrel, ahol $X^{(i)}$ a hozamvektor i-edik komponense és $X^{(i)}$ nagyobb, mint 0,6.

Az eredeti cikkben ([22]-ben), mivel f.a.e. adatsorokon végzett vizsgálatokat kézenfekvő volt a várható hozam vizsgálata, könnyen látható, hogy ha függések vannak egyes hozamok között, akkor ehelyett megfelelőbb a *feltételes* várható hozam vizsgálata. Vegyük észre, hogy függetlenség esetén a feltételes várható érték egybeesik a várható értékkel. Egy $\boldsymbol{b}$ portfólió Markowitz-féle hasznosság függvénye a következő kvadratikus alakban írható fel

$$\mathbb{E}\left\{ U_{E-V}\left(\left\langle \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}_1^{i-1})\,,\,\boldsymbol{X}_i\right\rangle\right)\Big|\,\boldsymbol{X}_1^{i-1}\right\} = E_{\boldsymbol{b}} - \lambda V_{\boldsymbol{b}}$$

ahol

$$E_{\boldsymbol{b}} = \mathbb{E}\left\{\left\langle \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}_1^{i-1})\,,\,\boldsymbol{X}_i\right\rangle\Big|\,\boldsymbol{X}_1^{i-1}\right\}$$

és

$$V_{\boldsymbol{b}} = \mathbf{Var}\left\{\left\langle \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}_1^{i-1})\,,\,\boldsymbol{X}_i\right\rangle\Big|\,\boldsymbol{X}_1^{i-1}\right\}$$

és λ a befektető kockázatkerülési hajlandósága. Mivel a kockázatkerülési hajlandóság az adott befektetőt jellemzi, ezért nem függ $\boldsymbol{b}$ a választott portfóliótól. Ezért a fenti egyenletet maximalizáló portfólióra igaz, hogy

$$b^*_{E-V} = \arg\max_{\boldsymbol{b}(\cdot)} E_{\boldsymbol{b}} - \lambda V_{\boldsymbol{b}} = \arg\max_{\boldsymbol{b}(\cdot)} \frac{E_{\boldsymbol{b}}}{\lambda} - V_{\boldsymbol{b}}. \tag{8}$$

A log-hasznosság és $E - V$ megközelítés közötti kapcsolatot vizsgálta Markowitz [23],[24] és Yong és Trent [38]. Megmutatták bizonyos hozamvektor eloszlásokra, hogy

$$\mathbb{E}\log\left(\left\langle \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}_1^{i-1})\,,\,\boldsymbol{X}_i\right\rangle\right)\approx\log\mathbb{E}\left\{\left\langle \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}_1^{i-1})\,,\,\boldsymbol{X}_i\right\rangle\right\}$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{Var}\left\{\left\langle \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}_1^{i-1})\,,\,\boldsymbol{X}_i\right\rangle\right\}}{\mathbb{E}\left\{\left(\left\langle \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}_1^{i-1})\,,\,\boldsymbol{X}_i\right\rangle\right)^2\right\}}\right).$$

A kövekezőkben egy általános összefüggést mutatunk a log-hasznosság és az $E-V$ megközelítés között, ehhez Györfi, Urbán és Vajda által a [18]-ban bevezetett *semi-log* függvényt használjuk, amely során nem kell semmilyen korlátozó feltételezés a hozamvektorról. A semi-log függvény a $\log z$ függvény másodrendű Taylor sorfejtése a $z=1$ körül

$$\log(z)\approx z-1-\frac{1}{2}(z-1)^2.$$

A fenti közelítést használva a log-hasznosságra azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\left\{\log\left\langle \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}_1^{i-1})\,,\,\boldsymbol{X}_i\right\rangle\Big|\,\boldsymbol{X}_1^{i-1}\right\}\approx\mathbb{E}\left\{\left\langle \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}_1^{i-1})\,,\,\boldsymbol{X}_i\right\rangle-1\Big|\,\boldsymbol{X}_1^{i-1}\right\}$$
$$-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left\{\left(\left\langle \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}_1^{i-1})\,,\,\boldsymbol{X}_i\right\rangle-1\right)^2\Big|\,\boldsymbol{X}_1^{i-1}\right\}.$$

A semi-log függvény egy jó közelítés $\log(z)$-re, mivel z tipikusan 1 körüli értéket vesz fel. Jelölje a feltételes második momentumot $E_{\boldsymbol{b}}^2$, azaz

$$E_{\boldsymbol{b}}^2=\mathbb{E}\left\{\left(\left\langle \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}_1^{i-1})\,,\,\boldsymbol{X}_i\right\rangle\right)^2\Big|\,\boldsymbol{X}_1^{i-1}\right\},$$

ekkor levezethető, hogy

$$\begin{aligned}\arg\max_{\boldsymbol{b}(\cdot)}\mathbb{E}\left\{\log\left\langle \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}_1^{i-1})\,,\,\boldsymbol{X}_i\right\rangle\Big|\,\boldsymbol{X}_1^{i-1}\right\}&\approx\arg\max_{\boldsymbol{b}(\cdot)}\left(2E_{\boldsymbol{b}}-\frac{1}{2}E_{\boldsymbol{b}}^2-\frac{3}{2}\right)\\&=\arg\max_{\boldsymbol{b}(\cdot)}\left(2E_{\boldsymbol{b}}-\frac{1}{2}\left(E_{\boldsymbol{b}}^2-(E_{\boldsymbol{b}})^2\right)-\frac{1}{2}(E_{\boldsymbol{b}})^2\right)\\&=\arg\max_{\boldsymbol{b}(\cdot)}\left(E_{\boldsymbol{b}}\left(2-\frac{1}{2}E_{\boldsymbol{b}}\right)-\frac{1}{2}V_{\boldsymbol{b}}\right)\\&=\arg\max_{\boldsymbol{b}(\cdot)}\left(E_{\boldsymbol{b}}(4-E_{\boldsymbol{b}})-V_{\boldsymbol{b}}\right)\\&=\arg\max_{\boldsymbol{b}(\cdot)}\left(\frac{E_{\boldsymbol{b}}}{\lambda_{\boldsymbol{b}}}-V_{\boldsymbol{b}}\right)\stackrel{\text{def}}{=}b_{s-\log}^*,\end{aligned}$$

ahol $\lambda_{\boldsymbol{b}}=\frac{1}{4-E_{\boldsymbol{b}}}$ egy várható hozamtól függő kockázatkerülési hajlandóság. Ez az alak megegyezik a Markowitz modellből levezetett (8)-ban lévő alakkal, avval az eltéréssel, hogy a kockázatkerülési hajlandóság $\lambda_{\mathbf{b}}$ függ $\mathbf{b}$ portfóliótól. Mivel $E_{\mathbf{b}}$ értéke 1 körüli, tipikusan korlátos intervallumba van (napi hozam a tőzsdei szabályozás miatt nem haladhat meg egy szintet), ezért a semi-log hasznosság megfeleltethető az $E - V$ hasznosságnak $\lambda \approx \frac{1}{3}$ választással.

5. Konkluzió

A cikkben pénzügyi piacokon alkalmazható szekvenciális befektetési (portfólió-választási) stratégiákat mutattunk be. Szemben a klasszikus modellekkel, amelyek a piac működésének a leírására erős statisztikai feltételezéseket tesznek, az ismertett modellekben a matematikai vizsgálatok során használt egyetlen feltétel, hogy a napi hozamok stacionárius és ergodikus folyamatot alkotnak. Bemutattuk az univerzális konzisztencia fogalmát és áttekintettük a hisztogram, a magfüggvény és a legközelebbi szomszéd alapú univerzálisan konzisztens stratégiákat és hozzájuk kapcsolódó empirikus eredményeket. Ezeknek a módszereknek a fő üzenete, hogy léteznek nem-paraméteres befektetési stratégiák, amelyek hatékonyan feltárják a múltbeli adatokban lévő rejtett összefüggéseket, és ezeket kiaknázva képesek gyors vagyonnövekedést elérni. Végül, párhuzamot vontunk a Markowitz-féle és log-optimális portfólióelmélet között az implicit kockázatkerülés fogalmán és a hasznosságfüggvény kvadratikus sorfejtésén keresztül.

Hivatkozások

[1] ALGOET, P. Universal schemes for prediction, gambling, and portfolio selection. *Annals of Probability 20* (1992), 901–941.

[2] ALGOET, P., AND COVER, T. Asymptotic optimality asymptotic equipartition properties of log-optimum investments. *Annals of Probability 16* (1988), 876–898.

[3] BARRON, A., AND COVER, T. A bound on the financial value of information. *IEEE Transactions on Information Theory 34* (1988), 1097–1100.

[4] BLUM, A., AND KALAI, A. Universal portfolios with and without transaction costs. *Machine Learning 35* (1999), 193–205.

[5] BORODIN, A., EL-YANIV, R., AND GOGAN, V. On the competitive theory and practice of portfolio selection (extended abstract). In *Proc. of the 4th Latin American Symposium on Theoretical Informatics (LATIN'00)* (Punta del Este, Uruguay, 2000), pp. 173–196.

[6] BREIMAN, L. Optimal gambling systems for favorable games. In *Proc. of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (Berkeley, 1961), University of California Press, pp. 65–78.

[7] CESA-BIANCHI, N., AND LUGOSI, G. Minimax values and entropy bounds for portfolio selection problems. In *Proc. of the First World Congress of the Game Theory Society* (2000).

[8] C.MERTON, R., AND SAMUELSON, P. A. Fallacy of the log-normal approximation to optimal decision making over many periods. *Journal of Financial Economics* (1974), 67–94.

[9] COVER, T. Universal portfolios. *Mathematical Finance 1* (1991), 1–29.

[10] COVER, T., AND ORDENTLICH, E. Universal portfolios with side information. *IEEE Transactions on Information Theory 42* (1996), 348–363.

[11] CROSS, J., AND BARRON, A. Efficient universal portfolios for past-dependent target classes. *Mathematical Finance 13* (2003), 245–276.

[12] DEVROYE, L., GYÖRFI, L., AND LUGOSI, G. *A Probabilistic Theory of Pattern Recognition*. Springer-Verlag, New York, 1996.

[13] FINKELSTEIN, M., AND WHITLEY, R. Optimal strategies for repeated games. *Advances in Applied Probability 13* (1981), 415–428.

[14] GYÖRFI, L., KOHLER, M., KRZYZAK, A., AND WALK, H. *A Distribution-Free Theory of Nonparametric Regression*. Springer, New York, 2002.

[15] GYÖRFI, L., LUGOSI, G., AND UDINA, F. Nonparametric kernel-based sequential investment strategies. *Mathematical Finance 16* (2006), 337–357.

[16] GYÖRFI, L., AND SCHÄFER, D. Nonparametric prediction. In *Advances in Learning Theory: Methods, Models and Applications*, J. A. K. Suykens, G. Horváth, S. Basu, C. Micchelli, and J. Vandevalle, Eds. IOS Press, NATO Science Series, 2003, pp. 339–354.

[17] GYÖRFI, L., UDINA, F., AND WALK, H. Nonparametric nearest-neighbor-based empirical portfolio selection strategies, 2006. Submitted to journal publication.

[18] GYÖRFI, L., URBÁN, A., AND VAJDA, I. Kernel-based semi-log-optimal empirical portfolio selection strategies, 2006. Submitted to journal publication.

[19] HELMBOLD, D. P., SCHAPIRE, R. E., SINGER, Y., AND WARMUTH, M. K. On-line portfolio selection using multiplicative updates. *Mathematical Finance 8* (1998), 325–344.

[20] KELLY, J. A new interpretation of information rate. *Bell System Technical Journal 35* (1956), 917–926.

[21] LATANÉ, H. Criteria for choice among risky ventures. *Journal of Political Economy 38* (1959), 145–155.

[22] MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *Journal of Finance 7*, 1 (1952), 77–91.

[23] MARKOWITZ, H. *Portfolio Selection: Efficient Diversification in Investments*. JW, 1959.

[24] MARKOWITZ, H. Investment for the long run: New evidence for an old rule. *Journal of Finance 31*, 5 (1976), 1273–1286.

[25] MORVAI, G. Empirical log-optimal portfolio selection. *Problems of Control and Information Theory 20*, 6 (1991), 453–463.

[26] MORVAI, G. Portfolio choice based on the empirical distribution. *Kybernetika 28*, 6 (1992), 484–493.

[27] MÓRI, T. F. Asymptotic properties of empiricial strategy in favourable stochastic games. In *Proc. Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 36. Limit Theorems in Probability and Statistics* (1982), pp. 777–790.

[28] MÓRI, T. F. Is the empirical strategy optimal? *Statistics and Decisons 4* (1986), 45–60.

[29] MÓRI, T. F., AND SZÉKELY, G. J. How to win if you can? In *Proc. Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 36. Limit Theorems in Probability and Statistics* (1982), pp. 791–806.

[30] ORDENTLICH, E., AND COVER, T. The cost of achieving the best portfolio in hindsight. *Mathematics of Operations Research 23* (1998), 960–982.

[31] SAMUELSON, P. A. Risk and uncertainty: A fallacy of large numbers. *Scientia 57* (April-May 1963).

[32] SHARPE, W. F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance 19* (1964), 425–442.

[33] SINGER, Y. Switching portfolios. *International Journal of Neural Systems 8* (May 1997), 445–455.

[34] STOLTZ, G., AND LUGOSI, G. Internal regret in on-line portfolio selection. In *Proc. of the 16th Annual Conference on Learning Theory, COLT 2003* (2003), Springer, pp. 403–417.

[35] VAJDA, I. Risk control in log-optimum investment, 2006.

[36] VOVK, V., AND WARMUTH, K. Universal portfolio selection. In *Proc. of the 11th Annual conference on Computational Learning Theory* (1998), pp. 12–23.

[37] WALK, H., AND YAKOWITZ, S. Iterative nonparametric estimation of a log-optimal portfolio selection function. *IEEE Transactions on Information Theory 48* (2002), 324–333.

[38] YONG, W. E., AND TRENT, R. M. Geometric mean approximation of individual security and portfolio performance. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* (1969).

Empirical portfolio strategies

György Ottucsák and István Vajda

Abstract

This paper introduces sequential investment strategies that guarantee an optimal rate of growth of the capital under minimal assumptions on the behavior of the market. The only assumption is that the market is stationary and ergodic. Both the theoretical and the empirical properties of the new strategies are reviewed. The theoretical results show that the asymptotic rate of growth matches the log-optimal one that could be achieved only with a full knowledge of the statistical properties of the underlying process generating the market. The new approach is related to the classical Markowitz portfolio strategy.
Journal of Economic Literature (JEL) classification: G11.