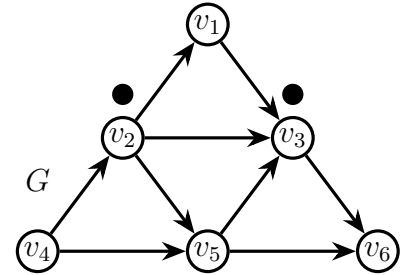


1. Két játékos játszik egymás ellen a jobbra látható G gráfon, miután G csúcsaira három bábut helyezünk el megengedve, hogy egy csúcson egyszerre több bábu is álljon. Ezt követően a játékosok felváltva lépnek. Minden lépésben a soron következő játékos egy általa választott bábut egy irányított él mentén az adott csúcs egy tetszőleges szomszédjába mozgat. Az veszít, aki nem tud így lépni. Ha már egy-egy bábu áll a v_2 és v_3 csúcsokban, akkor hogyan függ a 3-dik bábu elhelyezésétől, hogy az így kapott játék I-es vagy II-es típusú lesz?



A szóban forgó játék három olyan kombinatorikus játék összege, amelyek mindegyikéhez a G gráf tartozik, és az egyes játékok kezdőállásai az elhelyezett bábuk alatti csúcsok. (1 pont)

Ezért dinamikus programozással meghatározzuk G minden egyes csúcsának a Grundy-számát. (1 pont)

A csúcsok egy fordított topologikus sorrendje $v_6, v_3, v_1, v_5, v_2, v_4$, (1 pont)

Grundy számaik pedig $g(v_6) = \text{mex}\{\emptyset\} = 0$,

$g(v_3) = \text{mex}\{g(v_6)\} = \text{mex}\{0\} = 1$,

$g(v_1) = \text{mex}\{g(v_3)\} = \text{mex}\{1\} = 0$,

$g(v_5) = \text{mex}\{g(v_3), g(v_6)\} = \text{mex}\{0, 1\} = 2$,

$g(v_2) = \text{mex}\{g(v_1), g(v_3), g(v_5)\} = \text{mex}\{0, 1, 2\} = 3$,

$g(v_4) = \text{mex}\{g(v_2), g(v_5)\} = \text{mex}\{3, 2\} = 0$. (2 pont)

Egy játék pontosan akkor II-es típusú, ha a Grundy-száma 0. (1 pont)

A Sprague-Grundy tétel miatt az összegjáték Grundy-száma az egyes játékok Grundy-számainak NIM-összege. (1 pont)

Mivel $g(v_2) \oplus g(v_3) = 3 \oplus 1 = 2$, (1 pont)

ezért a kérdezett játék pontosan akkor II-es típusú, ha a harmadik bábu alatti mező Grundy-száma 2. (1 pont)

A fentiek szerint tehát ha a harmadik bábu a v_5 mezőn áll, akkor a kérdezett játék II-es típusú, minden más esetben pedig I-es típusú játékról van szó. (1 pont)

2. Módosítsuk a hex játék szabályát a következőképpen. A játékosok továbbra is a hex szokásos szabályai szerint lépnek, de a játék véget ér, amint a tábla két átellenes oldala között vezet olyan út, ami csupa azonos színre színezett mezőt használ. A játék győztese az a játékos, aki ezt az utat kiszínezte. (Tehát egyik játékos számára sincs előírva, hogy melyik két átellenes oldal összekötésével nyerhet.) Van-e valamelyik játékosnak nyerő stratégiája, és ha igen, akkor melyiknek?

Az órán láttuk, hogy a hex nem végződhet döntetlennel, ezért valamelyik játékosnak bizonyosan van nyerő stratégiája. (2 pont)

Stratégialopással megmutatjuk, hogy ez a kezdő játékos, akit a továbbiakban A-nak nevezünk. (2 pont)

Tegyük fel indirekt, hogy a második játékosnak (akit a továbbiakban B-nek hívunk) van nyerő stratégiája. Megmutatjuk, hogy e hipotetikus stratégia segítségével a kezdő játékos garantáltan nyerni tud. (1 pont)

1. megoldás

Képzelve A azt, hogy B már valamit lépett és játsszon ezen a képzelt pályán a második játékos nyerő stratégiája szerint B ellen. (2 pont)

Ez kivitelezhető, hiszen ha B a képzelt mezőt realizálja, akkor A választ egy tetszőleges másikat, kivéve ha a képzelt pálya már megtelt: ekkor a soron következő játékos mindenképpen a képzelt mezőt színezi ki és véget ér a játék. (2 pont)

A képzelt játékot A nyeri, ebből pedig következik hogy az eredetit is, hiszen az egyetlen különbség a valós pályában az lehet, ha az utolsó képzelt mezőt A realizálta, ez pedig nem ronthatta el a nyerését. (1 pont)

Ez ellentmondás.

2. megoldás

Első lépésként színezzon ki A egy tetszőleges mezőt, legyen ez az A játékos *speciális mezeje*. Innentől A képzelje azt, hogy ez a speciális mező üres és játsszon ezen a képzelt pályán a második játékos nyerő stratégiája szerint B ellen. (2 pont)

Ez kivitelezhető, hiszen ha A számára a stratégia a speciális mező kiszínezését írja elő, akkor helyette színezzon ki egy másik mezőt és legyen mostantól az a speciális mező. (2 pont)

A képzelt játékot A nyeri, ebből pedig következik, hogy az eredetit is, hiszen az egyetlen különbség a valós pályában az lehet, ha a képzelt pályán az utolsó körben B jött volna, neki pedig a speciális mezőre kellett volna raknia, amit a valóságban A már kiszínezett. (1 pont)

Ez ellentmondás.

3. Tekintsük a jobb oldalt látható mátrix által megadott stratégiai játékot. Jelölje p ill. q annak a valószínűségét, hogy a sorjátékos az F ill. az oszlopjátékos a B stratégiát választja.

	B	J
F	$(1, 1)$	$(2, -2)$
L	$(-1, 3)$	$(3, 5)$

- (a) Írjuk fel a sorjátékos $u_{\text{sor}}(p, q)$ nyereségfüggvényét.

$$\begin{aligned} u_{\text{sor}}(p, q) &= 1 \cdot pq + 2 \cdot p(1 - q) + (-1) \cdot (1 - p)q + 3 \cdot (1 - p)(1 - q) = \\ &= 3pq - p - 4q + 3 = p(3q - 1) - p + 3 \end{aligned}$$

(2 pont)

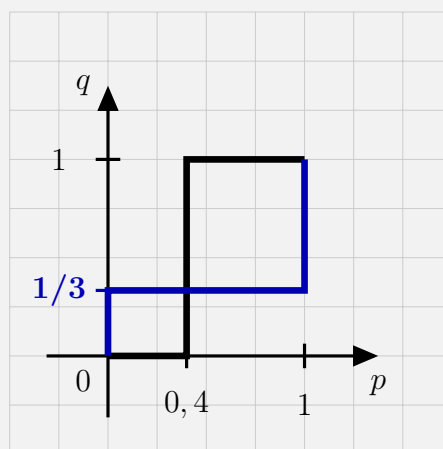
- (b) Az oszlopjátékos $u_{\text{oszlop}}(p, q)$ nyereségfüggvénye alapján készült a jobb oldali grafikon, ami p függvényében adja meg az oszlopjátékos legjobb kevert válaszait. Határozzuk meg a sorjátékos nyereségfüggvénye alapján, hogy a legjobb kevert válasza hogyan függ q -től. A válaszunknak megfelelő grafikont rajzoljuk is be a mellékelt ábrába.

Ha $3q - 1 > 0$, azaz $q > 1/3$, akkor a sorjátékos nyeresége a $p = 1$ választással lesz maximális.

Ha $3q - 1 = 0$, azaz $q = 1/3$, akkor a sorjátékos nyeresége tetszőleges $p \in [0, 1]$ választással ugyanannyi (és így maximális is) lesz.

Ha $3q - 1 < 0$, azaz $q < 1/3$, akkor a sorjátékos nyeresége a $p = 0$ választással lesz maximális.

(4 pont)



(2 pont)

- (c) Találjuk meg a vizsgált játék összes kevert Nash-egyensúlyát.

A tanultak szerint a kevert Nash-egyensúlyok éppen a legjobb válaszokat leíró grafikonok metszéspontjai lesznek. Az ábra szerint tehát három kevert Nash-egyensúly adódik: a $p = 0$; $q = 0$; a $p = 1$; $q = 1$; valamint a $p = 0,4$; $q = 1/3$ választások. (2 pont)

4. Iterált szigorú eliminálás segítségével a jobb oldalon látható mátrix által megadott kétszemélyes stratégiai játékból határozzuk meg azt a redukált játékot, ami-
ben további szigorú eliminálás már nem végezhető. Egyúttal határozzuk meg az eredeti játék összes ke-
vert Nash-egyensúlyát is.

	B	E	J
F	$(4, 0)$	$(3, -1)$	$(2, 1)$
K	$(-1, 2)$	$(4, 2)$	$(3, 3)$
L	$(2, 4)$	$(5, 1)$	$(1, 2)$

Kiderül a megoldásból, például szigorú eliminációk helyes végrehajtásával, hogy a hallgató tudja:

- A sorjátékos egy A tiszta stratégiája erősen dominálja egy B tiszta stratégiáját, ha az oszlopjátékos bármely választása esetén a sorjátékos A -val szigorúan jobban jár mint B -vel. Ilyenkor a B sor törölhető. (2 pont)
- Az oszlopjátékos egy A tiszta stratégiája erősen dominálja egy B tiszta stratégiáját, ha a sorjátékos bármely választása esetén az oszlopjátékos A -val szigorúan jobban jár mint B -vel. Ilyenkor a B oszlop törölhető. (2 pont)

Négy szigorú eliminációval egy 1×1 -es mátrixig kell eljutni, például a következőképp:

Az E oszlop törölhető, mert J erősen dominálja. (1 pont)

Ezután az L sor törölhető, mert F erősen dominálja. (1 pont)

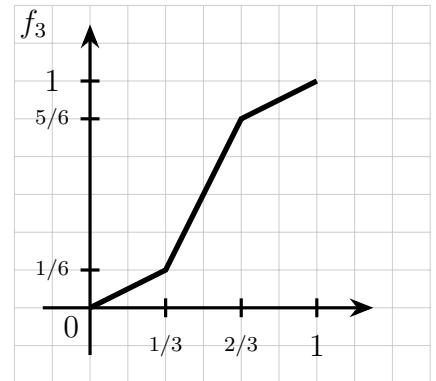
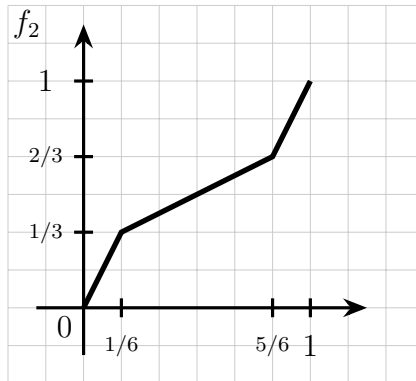
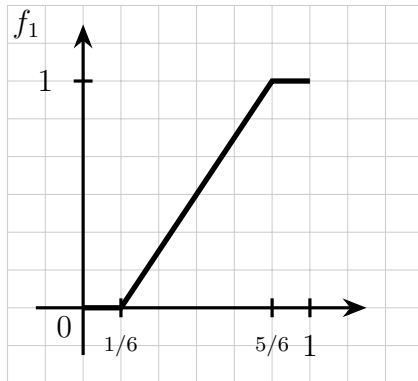
Ezután a B oszlop törölhető, mert J erősen dominálja. (1 pont)

Ezután az F sor törölhető, mert K erősen dominálja. (1 pont)

Egyedül a K és J stratégiák maradtak, tehát ezen stratégiák választása adja a redukált játék egyedüli kevert Nash-egyensúlyát. (1 pont)

Az órán tanult tétel miatt az eredeti játéknak is ez az egyetlen kevert Nash-egyensúly. (1 pont)

5. Három játékos osztzik a $[0, 1)$ intervallumon diszkrét mozgó késes eljárással. Melyik játékos kapja az utolsó szeletet és mi lesz a jussa, ha az alábbi grafikonok írják le az egyes játékosok értékelő eloszlásfüggvényeit?



$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4}(6x - 1), & \text{ha } \frac{1}{6} \leq x \leq \frac{5}{6} \\ 1, & \text{ha } \frac{5}{6} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4}(2x + 1), & \text{ha } \frac{1}{6} \leq x \leq \frac{5}{6} \\ 2x - 1, & \text{ha } \frac{5}{6} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x/2, & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}(4x - 1), & \text{ha } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2}(x + 1), & \text{ha } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

A diszkrét mozgó késes eljárás első fázisában a P_1, P_2, P_3 játékosoktól egy-egy értékharmadoló osztópontot kérünk a $[0, 1)$ intervallumra. (1 pont)

Tehát mindegyikőjük meghatározza azt a legkisebb x_i helyet, amire a $[0, x_i)$ intervallum értéke a számára $\mu_i([0, x_i)) = \frac{1}{3}\mu_i([0, 1)) = \frac{1}{3}$. (1 pont)

Az ábráról leolvasható, vagy behelyettesítéssel megkapható, hogy $x_2 = \frac{1}{6}$, továbbá x_1 és x_3 nagyobbak $\frac{1}{6}$ -nál. (2 pont)

Ezért az első fázis végén P_2 a $[0, \frac{1}{6})$ szelettel távozik. (1 pont)

A második fázisban a P_1 és P_3 játékosoktól egy-egy értékefelező osztópontot kérünk az $[\frac{1}{6}, 1)$ intervallumra. (1 pont)

Tehát megkeresik azt a legkisebb y_1 ill. y_3 pontot, amire $\mu_1([\frac{1}{6}, y_1)) = \frac{1}{2} \cdot \mu_1([\frac{1}{6}, 1))$ ill. $\mu_3([\frac{1}{6}, y_3)) = \frac{1}{2} \cdot \mu_3([\frac{1}{6}, 1))$. (1 pont)

Az ábráról leolvasható, vagy behelyettesítéssel megkapható, hogy $\mu_1([\frac{1}{6}, 1)) = 1$ és $\mu_3([\frac{1}{6}, 1)) = \frac{11}{12}$. (1 pont)

Az ábráról leolvasható, vagy behelyettesítéssel megkapható, hogy $y_1 = \frac{1}{2}$, és $y_3 > \frac{1}{2}$. (1 pont)

Ezért a második fázis végén P_1 az $[\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$ szelettel távozik, a harmadik fázisban pedig P_3 egyedül marad és utolsóként távozik a megmaradt $[\frac{1}{2}, 1)$ szelettel. (1 pont)

- ★ Három hitelező kelmeszabály-konzisztens módon történő osztozkodása nyomán az első hitelező jussa 10, a másodiké 90, a harmadiké pedig 50 fabatka. Tudjuk, hogy bármely más vagyonnagyság mellett osztozkodva a második hitelező kevesebbet kap, mint az első hitelezőnek járó rész kilencszerese. Mennyi a harmadik hitelező követelése?

A kelmeszabály közlekedőedényes modelljéből világosan látszik, hogy az első és második hitelező jussának az aránya akkor maximális, ha a közlekedőedényekben a vízszint a kevesebbet követelő első hitelező felső tartályának alsó szintjén áll.

Ennek lehetséges indoklása, például:

Az optimum nem lehet ezen pont alatt: A közlekedőedény-rendszer vízzel való feltöltése közben a kisebbik követelés feléig egyenlően kapnak a hitelezők, majd egészen addig, amíg a vízszint a kisebbik hitelező felső tartályának alsó szintjét el nem éri, csakis a többet követelő hitelező részesül a vagyontól, így eddig a pontig a részek aránya szigorúan monoton növekszik.

(4 pont)

Az optimum nem lehet ezen pont felett: Ahogy a vízszint tovább emelkedik, egyformán növekszik a részesedésük, vagyis ettől a ponttól kezdve a részek aránya szigorúan monoton csökken.

(4 pont)

Mivel d_1 a legkisebb követelés, ezért mindenhol a felső edényben van a vízszint, azaz mindegyik hitelező vesztesége megegyezik az első hitelező követelésének felével, 10 fabatkával. (1 pont)

Ebből adódik, hogy $d_3 = 50 + 10 = 60$.

(1 pont)

