

Stabil párosítás. Legyen $G = (V, E)$ egy gráf, melynek minden csúcsára adott egy $\preceq_v$ precedencia sorrendezés a v -re illeszkedő élek halmazán.

Az M párosítás **dominálja** az e élet, ha van olyan $m \in M$ él és $v \in V$ csúcs, amire $e \preceq_v m$ teljesül.

Az e él **blokkolja** az M párosítást, ha M nem dominálja e -t.

Az M párosítás **stabil**, ha nem létezik M -et blokkoló él E -ben.

Éltörlési lemma. Ha $e = uv$ az $\preceq_u$ szerinti legjobb él, és $f \prec_v e$ teljesül valamely f éltre, akkor G stabil párosításainak halmaza megegyezik $G - f$ stabil párosításainak halmazával.

Gale-Shapley-algoritmus (lánycérő algoritmus).

Bemenet: $G = (V, E)$ páros gráf, $\preceq_v$ preferenciasorrendek minden $v \in V$ csúcsra.

Kimenet: a G egy M stabil párosítása.

Működés: A fiú színosztály minden csúcsa kijelöli a legjobb rá illeszkedő élet. Ha egy lány színosztálybeli csúcsba egynél több kijelölt él fut, akkor töröljük a legjobb kijelölt éltől különböző kijelölt éleket, és iterálunk. Ha nincs törlés, akkor a kimenet a kijelölt élek M halmaza.

Állítás. A lánycérő algoritmus kimenete fiú-optimális, azaz minden fiú a számára bármilyen stabil párosításban elérhető legjobb feleséget kapja, valamint lány-pesszimális, azaz minden lány csúcsnak a számára bármilyen stabil párosításban elérhető legrosszabb férj jut.

Állítás. Ha M_1 és M_2 stabil párosítások a G gráfban, akkor az $M_1 \triangle M_2$ szimmetrikus különbség minden komponense alternáló preferenciakör.

Állítás. A G gráf bármely két stabil párosítása ugyanazokat a csúcsokat fedi.

Állítás. Legyenek $e_1, e_2, \dots, e_m$ a G gráf élei és a gráf minden csúcsa preferálja a kisebb indexű éleket. Ekkor G -ben pontosan egy stabil párosítás van, ami az éltörlési lemma ismételt alkalmazásával megkapható.

Stabil párosítás. Legyen $G = (V, E)$ egy gráf, melynek minden csúcsára adott egy $\preceq_v$ precedencia sorrendezés a v -re illeszkedő élek halmazán.

Az M párosítás **dominálja** az e élet, ha van olyan $m \in M$ él és $v \in V$ csúcs, amire $e \preceq_v m$ teljesül.

Az e él **blokkolja** az M párosítást, ha M nem dominálja e -t.

Az M párosítás **stabil**, ha nem létezik M -et blokkoló él E -ben.

Éltörlési lemma. Ha $e = uv$ az $\preceq_u$ szerinti legjobb él, és $f \prec_v e$ teljesül valamely f éltre, akkor G stabil párosításainak halmaza megegyezik $G - f$ stabil párosításainak halmazával.

Gale-Shapley-algoritmus (lánycérő algoritmus).

Bemenet: $G = (V, E)$ páros gráf, $\preceq_v$ preferenciasorrendek minden $v \in V$ csúcsra.

Kimenet: a G egy M stabil párosítása.

Működés: A fiú színosztály minden csúcsa kijelöli a legjobb rá illeszkedő élet. Ha egy lány színosztálybeli csúcsba egynél több kijelölt él fut, akkor töröljük a legjobb kijelölt éltől különböző kijelölt éleket, és iterálunk. Ha nincs törlés, akkor a kimenet a kijelölt élek M halmaza.

Állítás. A lánycérő algoritmus kimenete fiú-optimális, azaz minden fiú a számára bármilyen stabil párosításban elérhető legjobb feleséget kapja, valamint lány-pesszimális, azaz minden lány csúcsnak a számára bármilyen stabil párosításban elérhető legrosszabb férj jut.

Állítás. Ha M_1 és M_2 stabil párosítások a G gráfban, akkor az $M_1 \triangle M_2$ szimmetrikus különbség minden komponense alternáló preferenciakör.

Állítás. A G gráf bármely két stabil párosítása ugyanazokat a csúcsokat fedi.

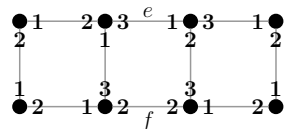
Állítás. Legyenek $e_1, e_2, \dots, e_m$ a G gráf élei és a gráf minden csúcsa preferálja a kisebb indexű éleket. Ekkor G -ben pontosan egy stabil párosítás van, ami az éltörlési lemma ismételt alkalmazásával megkapható.

1. Határozzunk meg az alábbi preferencialistákkal megadott páros gráfokban egy-egy stabil párosítást. A gráfok egyik színosztályának csúcsait az $\{a, b, c, d, e\}$ halmazból vett betűkkel, a másik színosztályának csúcsait az $\{s, r, t, x, y, z\}$ halmazból vett betűkkel jelöltük. Az egyes csúcsok a szomszédait a preferenciasorrendjük szerinti **csökkenő** sorrendben sorolják fel.

a) $a : s, t, r$	$s : b, a, c$	b) $a : s, z, t, y$	$s : c, b, a$	c) $a : s, t, r$	$s : e, b, c, a$
$b : t, s, r$	$r : a, c, b$	$b : t, s, r, x$	$r : b$	$b : s, r, t$	$r : b, a$
$c : s, t, r$	$t : a, c, b$	$c : z, x, y, s$	$t : d, b, a$	$c : s, t, x$	$t : c, a, b$
		$d : t, z, x$	$x : b, c, d$	$d : y, x$	$x : d, c$
			$y : c, a$	$e : y, s$	$y : d, e$
			$z : d, a, c$		

2. Változik-e attól a stabil párosítások száma, ha az ábrán látható gráfból töröljük

- a) az e , illetve
b) az f élt?



3. Lássuk be, hogy a $K_{n,m}$ teljes páros gráfban tetszőleges preferenciasorrendek mellett minden stabil párosítás lefedi a nemnagyobbik színosztályt.
4. Mutassunk olyan gráfot, amelyben létezik stabil párosítás ami se nem fiú-optimális se nem lány-optimális.
5. Mutassunk olyan gráfot, amelyben a csúcsok számában exponenciális sok stabil párosítás létezik.
6. Lássuk be, hogy a lányok szempontjából a lánykérő algoritmus nem taktikázásbiztos.
7. Tegyük fel, hogy a G páros gráfban a lányok egy közös preferencialista szerint sorrendezik a fiúkat. Mutassuk meg, hogy ekkor pontosan egy stabil párosítás van G -ben!
8. Tegyük fel, hogy G -ben van egy él aki semelyik stabil párosításban nincs benne. Megváltozhat-e a stabil párosítások halmaza G -ben ha ezt az élet kitöröljük?
9. Mutassuk meg, hogy $K_{n,n}$ -ben tetszőleges preferenciasorrendek mellett a fiú-optimális stabil párosításban nem lehet két különböző fiú aki a preferenciasorrendjében a legutolsó lányt kapta.
10. Tegyük fel, hogy a G gráf minden e élére igaz, hogy van olyan stabil párosítása G -nek amely tartalmazza e -t. Lássuk be, hogy ha M a G egy stabil párosítása, akkor M stabil marad akkor is, ha G minden csúcsa megfordítja a preferenciasorrendjét az élei felett.

11. A „barátságos békák” játékban adott a síkon n darab pont úgy, hogy bármely két pontpár távolsága különböző – ezek a pontok egy tó tavirózsáinak helyét jelölik. A játékban két játékos lép felváltva a következő szabályok szerint. A kezdőjátékos az első lépésben kiválaszt egy tavirózsát és rátesz egy békát. Ezután a másik játékos választ egy, az előzőtől különböző tavirózsát és szintén rátesz egy békát. Innentől minden lépésben a soron következő játékos választ egyet a két béka közül és áthelyezi azt egy másik tavirózsára úgy, hogy a két béka közötti távolság szigorúan csökkenjen, de a két béka nem kerülhet ugyanarra a tavirózsára. Az a játékos veszít, aki nem tud lépni.

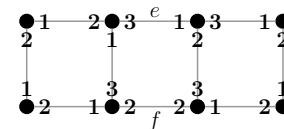
- a) Bizonyítsuk be, hogy ha n páros, akkor a második játékosnak van nyerő stratégiája.
b) Bizonyítsuk be, hogy ha n páratlan, akkor a kezdőjátékosnak van nyerő stratégiája.

1. Határozzunk meg az alábbi preferencialistákkal megadott páros gráfokban egy-egy stabil párosítást. A gráfok egyik színosztályának csúcsait az $\{a, b, c, d, e\}$ halmazból vett betűkkel, a másik színosztályának csúcsait az $\{s, r, t, x, y, z\}$ halmazból vett betűkkel jelöltük. Az egyes csúcsok a szomszédait a preferenciasorrendjük szerinti **csökkenő** sorrendben sorolják fel.

a) $a : s, t, r$	$s : b, a, c$	b) $a : s, z, t, y$	$s : c, b, a$	c) $a : s, t, r$	$s : e, b, c, a$
$b : t, s, r$	$r : a, c, b$	$b : t, s, r, x$	$r : b$	$b : s, r, t$	$r : b, a$
$c : s, t, r$	$t : a, c, b$	$c : z, x, y, s$	$t : d, b, a$	$c : s, t, x$	$t : c, a, b$
		$d : t, z, x$	$x : b, c, d$	$d : y, x$	$x : d, c$
			$y : c, a$	$e : y, s$	$y : d, e$
			$z : d, a, c$		

2. Változik-e attól a stabil párosítások száma, ha az ábrán látható gráfból töröljük

- a) az e , illetve
b) az f élt?



3. Lássuk be, hogy a $K_{n,m}$ teljes páros gráfban tetszőleges preferenciasorrendek mellett minden stabil párosítás lefedi a nemnagyobbik színosztályt.
4. Mutassunk olyan gráfot, amelyben létezik stabil párosítás ami se nem fiú-optimális se nem lány-optimális.
5. Mutassunk olyan gráfot, amelyben a csúcsok számában exponenciális sok stabil párosítás létezik.
6. Lássuk be, hogy a lányok szempontjából a lánykérő algoritmus nem taktikázásbiztos.
7. Tegyük fel, hogy a G páros gráfban a lányok egy közös preferencialista szerint sorrendezik a fiúkat. Mutassuk meg, hogy ekkor pontosan egy stabil párosítás van G -ben!
8. Tegyük fel, hogy G -ben van egy él aki semelyik stabil párosításban nincs benne. Megváltozhat-e a stabil párosítások halmaza G -ben ha ezt az élet kitöröljük?
9. Mutassuk meg, hogy $K_{n,n}$ -ben tetszőleges preferenciasorrendek mellett a fiú-optimális stabil párosításban nem lehet két különböző fiú aki a preferenciasorrendjében a legutolsó lányt kapta.
10. Tegyük fel, hogy a G gráf minden e élére igaz, hogy van olyan stabil párosítása G -nek amely tartalmazza e -t. Lássuk be, hogy ha M a G egy stabil párosítása, akkor M stabil marad akkor is, ha G minden csúcsa megfordítja a preferenciasorrendjét az élei felett.

11. A „barátságos békák” játékban adott a síkon n darab pont úgy, hogy bármely két pontpár távolsága különböző – ezek a pontok egy tó tavirózsáinak helyét jelölik. A játékban két játékos lép felváltva a következő szabályok szerint. A kezdőjátékos az első lépésben kiválaszt egy tavirózsát és rátesz egy békát. Ezután a másik játékos választ egy, az előzőtől különböző tavirózsát és szintén rátesz egy békát. Innentől minden lépésben a soron következő játékos választ egyet a két béka közül és áthelyezi azt egy másik tavirózsára úgy, hogy a két béka közötti távolság szigorúan csökkenjen, de a két béka nem kerülhet ugyanarra a tavirózsára. Az a játékos veszít, aki nem tud lépni.

- a) Bizonyítsuk be, hogy ha n páros, akkor a második játékosnak van nyerő stratégiája.
b) Bizonyítsuk be, hogy ha n páratlan, akkor a kezdőjátékosnak van nyerő stratégiája.