

Újraosztási feladat. (Lakáspiac) Legyen $N = \{1, \dots, n\}$ a lakástulajdonosok halmaza. Minden tulajdonosnak van egy preferenciasorrendje (permutációja) a lakások felett, az i . tulajdonos ehhez tartozó rendezési relációjának jele $\prec_i$. Keresünk egy σ újraosztást (permutációt), ahol az i . tulajdonos a $\sigma(i)$. tulajdonos lakását kapja.

Gyengén blokkoló koalíció. Egy σ újraosztást a tulajdonosok egy részhalmaza gyengén blokkol, ha ők el tudnák egymás között osztani a saját lakásaikat úgy, hogy mindenki legalább olyan jól járjon és létezzen valaki aki szigorúan jobban jár mint σ -ban.

Erős mag. Egy σ újraosztás erős magbeli, ha azt nem blokkolja gyengén koalíció.

Felső körcsere (Top Trading Cycle, TTC) algoritmus. A lakástulajdonosok rámutatnak a számukra legszimpatikusabb még a piacon lévő lakás tulajdonosára. A kialakuló körök egymás között cserélnek és távoznak a piacról. A többiek ismétlik ezt, amíg mindenki nem távozik.

Lemma. Vegyük a TTC szerinti újraosztást és egy másik σ újraosztást. Ha van olyan i játékos aki a σ -val jobban járna, akkor van egy másik j játékos is, aki meg rosszabbul.

Shapley-Scarf tétel. Egy újraosztási feladat erős magja pontosan egy újraosztást tartalmaz, ami éppen a TTC algoritmus kimenete.

Lakáspiaci egyensúly. Minden lakáshoz hozzárendelek egy (pozitív) valós számot (árát) **úgy**, hogy ha minden tulajdonosnak adok annyi pénzt, amennyit a saját lakása ér, majd mindenkit megkérek hogy mutasson rá a neki legszimpatikusabb lakásra aminek az árát ki tudná fizetni, akkor minden lakásra pontosan egyvalaki mutatott rá (vagyis ez meghatároz egy újraosztást).

Tétel. Egy lakáspiaci egyensúlyi árazás által meghatározott újraosztás erős magbeli.

Állítás. Minden újraosztási feladathoz létezik lakáspiaci egyensúlyi árazás: egy jó árazás a TTC algoritmussal meghatározható, például legyen az i . lakás ára $n - k_i$, ahol az i . tulajdonos a k_i . körben távozott a piacról.

Újraosztási feladat. (Lakáspiac) Legyen $N = \{1, \dots, n\}$ a lakástulajdonosok halmaza. Minden tulajdonosnak van egy preferenciasorrendje (permutációja) a lakások felett, az i . tulajdonos ehhez tartozó rendezési relációjának jele $\prec_i$. Keresünk egy σ újraosztást (permutációt), ahol az i . tulajdonos a $\sigma(i)$. tulajdonos lakását kapja.

Gyengén blokkoló koalíció. Egy σ újraosztást a tulajdonosok egy részhalmaza gyengén blokkol, ha ők el tudnák egymás között osztani a saját lakásaikat úgy, hogy mindenki legalább olyan jól járjon és létezzen valaki aki szigorúan jobban jár mint σ -ban.

Erős mag. Egy σ újraosztás erős magbeli, ha azt nem blokkolja gyengén koalíció.

Felső körcsere (Top Trading Cycle, TTC) algoritmus. A lakástulajdonosok rámutatnak a számukra legszimpatikusabb még a piacon lévő lakás tulajdonosára. A kialakuló körök egymás között cserélnek és távoznak a piacról. A többiek ismétlik ezt, amíg mindenki nem távozik.

Lemma. Vegyük a TTC szerinti újraosztást és egy másik σ újraosztást. Ha van olyan i játékos aki a σ -val jobban járna, akkor van egy másik j játékos is, aki meg rosszabbul.

Shapley-Scarf tétel. Egy újraosztási feladat erős magja pontosan egy újraosztást tartalmaz, ami éppen a TTC algoritmus kimenete.

Lakáspiaci egyensúly. Minden lakáshoz hozzárendelek egy (pozitív) valós számot (árát) **úgy**, hogy ha minden tulajdonosnak adok annyi pénzt, amennyit a saját lakása ér, majd mindenkit megkérek hogy mutasson rá a neki legszimpatikusabb lakásra aminek az árát ki tudná fizetni, akkor minden lakásra pontosan egyvalaki mutatott rá (vagyis ez meghatároz egy újraosztást).

Tétel. Egy lakáspiaci egyensúlyi árazás által meghatározott újraosztás erős magbeli.

Állítás. Minden újraosztási feladathoz létezik lakáspiaci egyensúlyi árazás: egy jó árazás a TTC algoritmussal meghatározható, például legyen az i . lakás ára $n - k_i$, ahol az i . tulajdonos a k_i . körben távozott a piacról.

1. Határozzunk meg a felső körcsere algoritmus segítségével az 1, 2, 3, 4(, 5) lakások egy-egy újraosztását, ha a tulajdonosok preferenciasorrendje a következő.

a)	b)	c)
1: (3, 2, 4, 1)	1: (5, 2, 1, 3, 4)	1: (2, 5, 3, 1, 4)
2: (4, 1, 2, 3)	2: (5, 4, 3, 1, 2)	2: (3, 1, 5, 4, 2)
3: (1, 4, 3, 2)	3: (4, 2, 3, 5, 1)	3: (1, 2, 3, 4, 5)
4: (3, 2, 1, 4)	4: (2, 1, 5, 3, 4)	4: (1, 3, 5, 4, 2)
	5: (2, 4, 1, 5, 3)	5: (4, 1, 3, 2, 5)

2. Határozzunk meg az 1. feladatban minden újraosztási feladathoz egy-egy jó lakáspiaci egyensúlyi árazást.

3. Mutassuk meg, hogy a felső körcsere algoritmus kimenete Pareto-optimalis.

4. Mutassunk példát olyan preferencia profilra, amelyre nézve tetszőleges árazás egyensúlyi árazás lesz!

5. Adott egy újraosztási probléma, ahol a tulajdonosok több lakással is rendelkezhetnek. Minden tulajdonosnak szigorú preferenciasorrendje van az összes lakás fölött, beleértve a sajátjait is. Csak olyan újraosztások megengedettek, ahol minden tulajdonos ugyanannyi lakást kap, mint amennyivel eredetileg rendelkezett. Tegyük fel, hogy egy k db lakással rendelkező tulajdonos eredeti lakásai a preferenciasorrendben az $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ helyeket foglalják el, az újraosztás után kapott lakásai pedig a $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ helyeken állnak. Azt mondjuk, hogy ez a tulajdonos legalább olyan jól járt az újraosztással, ha $i_1 \leq j_1, i_2 \leq j_2, \dots, i_k \leq j_k$ és szigorúan jobban járt ha az ezek közül legalább egy szigorú. Adjunk hatékony algoritmust egy erős magbéli újraosztás megtalálására.

6. Tekintsük az újraosztási feladat azon általánosítását, amelyben minden lakástulajdonos egy lakással rendelkezik, de bizonyos lakások ugyanabban a társasházban találhatóak, és az ilyen lakások teljesen egyenlőek minden tulajdonos preferenciarendezésében, az azonos lakásokat leszámítva viszont szigorúak a preferenciarendezések. Adjunk hatékony algoritmust egy olyan újraelosztás megtalálására, amit nem blokkol olyan koalíció, amiben **mindenki szigorúan jobban járna** mint az újraosztásban.

7. Ingatlanisztánban minden lakosnak pontosan egy lakása van. Misi gyakornokként dolgozik a Lakásár Egyensúlyi Bizottságnál (LEB), amelynek feladata a lakásárak egyensúlyának fenntartása. Év végén minden tulajdonos levelet küld a LEB-nek, benne saját preferenciasorrendjével Ingatlanisztán összes lakásáról. Misi ezek alapján egész nap dolgozott, hogy kiszámítsa az egyensúlyi lakásárakat, majd az eredményt feljegyezte minden levél aljára. Ám éjszaka egy gonosz borítéklopó manó betört, és ellopta az összes borítékot, rajta a feladóval és a címével, a borítékok tartalmát hátrahagyva! Így Misi másnap rájött, hogy nem tudja, melyik preferencialista és ár kihez tartozik. Főnöke, Tamás, hamarosan megérkezik ellenőrizni a munkát. Segíts Misinek egy hatékony algoritmust találni, amellyel eldöntheti, melyik tulajdonosnak melyik árat kell visszaküldenie (a preferenciasorrendet nem kell visszaküldeni).

1. Határozzunk meg a felső körcsere algoritmus segítségével az 1, 2, 3, 4(, 5) lakások egy-egy újraosztását, ha a tulajdonosok preferenciasorrendje a következő.

a)	b)	c)
1: (3, 2, 4, 1)	1: (5, 2, 1, 3, 4)	1: (2, 5, 3, 1, 4)
2: (4, 1, 2, 3)	2: (5, 4, 3, 1, 2)	2: (3, 1, 5, 4, 2)
3: (1, 4, 3, 2)	3: (4, 2, 3, 5, 1)	3: (1, 2, 3, 4, 5)
4: (3, 2, 1, 4)	4: (2, 1, 5, 3, 4)	4: (1, 3, 5, 4, 2)
	5: (2, 4, 1, 5, 3)	5: (4, 1, 3, 2, 5)

2. Határozzunk meg az 1. feladatban minden újraosztási feladathoz egy-egy jó lakáspiaci egyensúlyi árazást.

3. Mutassuk meg, hogy a felső körcsere algoritmus kimenete Pareto-optimalis.

4. Mutassunk példát olyan preferencia profilra, amelyre nézve tetszőleges árazás egyensúlyi árazás lesz!

5. Adott egy újraosztási probléma, ahol a tulajdonosok több lakással is rendelkezhetnek. Minden tulajdonosnak szigorú preferenciasorrendje van az összes lakás fölött, beleértve a sajátjait is. Csak olyan újraosztások megengedettek, ahol minden tulajdonos ugyanannyi lakást kap, mint amennyivel eredetileg rendelkezett. Tegyük fel, hogy egy k db lakással rendelkező tulajdonos eredeti lakásai a preferenciasorrendben az $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ helyeket foglalják el, az újraosztás után kapott lakásai pedig a $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ helyeken állnak. Azt mondjuk, hogy ez a tulajdonos legalább olyan jól járt az újraosztással, ha $i_1 \leq j_1, i_2 \leq j_2, \dots, i_k \leq j_k$ és szigorúan jobban járt ha az ezek közül legalább egy szigorú. Adjunk hatékony algoritmust egy erős magbéli újraosztás megtalálására.

6. Tekintsük az újraosztási feladat azon általánosítását, amelyben minden lakástulajdonos egy lakással rendelkezik, de bizonyos lakások ugyanabban a társasházban találhatóak, és az ilyen lakások teljesen egyenlőek minden tulajdonos preferenciarendezésében, az azonos lakásokat leszámítva viszont szigorúak a preferenciarendezések. Adjunk hatékony algoritmust egy olyan újraelosztás megtalálására, amit nem blokkol olyan koalíció, amiben **mindenki szigorúan jobban járna** mint az újraosztásban.

7. Ingatlanisztánban minden lakosnak pontosan egy lakása van. Misi gyakornokként dolgozik a Lakásár Egyensúlyi Bizottságnál (LEB), amelynek feladata a lakásárak egyensúlyának fenntartása. Év végén minden tulajdonos levelet küld a LEB-nek, benne saját preferenciasorrendjével Ingatlanisztán összes lakásáról. Misi ezek alapján egész nap dolgozott, hogy kiszámítsa az egyensúlyi lakásárakat, majd az eredményt feljegyezte minden levél aljára. Ám éjszaka egy gonosz borítéklopó manó betört, és ellopta az összes borítékot, rajta a feladóval és a címével, a borítékok tartalmát hátrahagyva! Így Misi másnap rájött, hogy nem tudja, melyik preferencialista és ár kihez tartozik. Főnöke, Tamás, hamarosan megérkezik ellenőrizni a munkát. Segíts Misinek egy hatékony algoritmust találni, amellyel eldöntheti, melyik tulajdonosnak melyik árat kell visszaküldenie (a preferenciasorrendet nem kell visszaküldeni).