

Szavazási modell. Legyen $N = \{1, \dots, n\}$ a szavazók halmaza és $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ az alternatívák halmaza. Az i . szavazó szavazata az alternatívák egy lehetséges sorrendje (permutációja), az ehhez tartozó rendezési reláció jele a $\prec_i$. Az n szavazó egy lehetséges választási profilja a $\Pi = (\prec_1, \dots, \prec_n)$. A szavazási mechanizmus egy $F(\Pi)$ társadalmi választási szabályt (TVSZ) határoz meg, mely egy választási profilhoz hozzárendeli a szavazás eredményét, azaz az alternatíváknak a közös döntés szerinti sorrendjét. A nyertes alternatíva a TVSZ sorrendjében az első, az $f(\Pi)$ társadalmi választási függvény (TVF) ezt a nyertes alternatívát rendeli hozzá a Π -hez.

Többségi szavazás. A többségi szavazás TVSZ-e megszámlolja, hogy egy adott alternatíva hány-szor fordul elő első helyen a szavazatokban és az alternatívákat ezen előfordulási darabszám szerinti csökkenő sorrendbe teszi. Egyenlőség esetén az első szavazó szavazata dönt.

Borda-szavazás. Az i . szavazó $a \in A$ alternatívához rendelt Borda-pontszáma $B_i(a) = k - l$, ahol l az a alternatíva sorszáma az i . szavazó sorrendjében. Az a Borda-pontszáma $B(a)$, a szavazók Borda-pontszámainak az összege. A Borda-szavazás TVSZ-e a Borda-pontszám szerinti csökkenő sorrendbe rendezi az alternatívákat. Egyenlőség esetén az első szavazó szavazata dönt.

Condorcet-konzisztencia. Az a alternatíva legyőz egy tőle különböző b alternatívát, ha szigorúan több szavazó sorolta a -t a b elé a sorrendjében. Az a alternatíva Condorcet-győztes, ha legyőzött minden más alternatívát (ilyen nem mindig van). Egy szavazási mechanizmus Condorcet-konzisztens, ha a Condorcet-győztest választja nyertesnek, amennyiben az létezik.

Copeland-szavazás. Az $a \in A$ alternatíva Copeland-pontszáma $C(a) = w(a) - l(a)$, ahol $w(a)$ jelöli azon alternatívák darabszámát, melyeket a legyőzött, $l(a)$ pedig azok darabszámát, melyek legyőzték a -t. A Copeland-szavazás TVSZ-e a Copeland-pontszám szerinti csökkenő sorrendbe rendezi az alternatívákat. Egyenlőség esetén az első szavazó szavazata dönt.

Tétel. A Copeland-szavazás Condorcet-konzisztens.

Szavazási mechanizmusok tulajdonságai.

- **Szimmetrikus / anonim:** A TVSZ által adott eredmény nem változik, ha a szavazók tetszőleges permutáció szerint helyet cserélnek egymással.
- **Semleges / pártatlan:** A TVSZ által adott eredmény nem változik, ha a szavazók tetszőleges permutáció szerint átcímkezik az alternatívákat és az eredeti preferenciasorrendjük szerint szavaznak, de az alternatívák új címkeit írják a szavazólapra, a kapott eredményt pedig vissza-kódolják az eredeti címkézésre.
- **Egyhangú:** Ha $a, b \in A$ különböző alternatívákra minden szavazó a -t előrébb sorolja b -nél a szavazatában, akkor a TVSZ eredményében is a előrébb lesz mint b .
- **Független a lényegtelen alternatíváktól (FLA):** Ha a szavazók úgy módosítják a szavazatukat, hogy egy adott alternatívahalmaz elemeinek az egymáshoz viszonyított sorrendje mindenkinél változatlan marad, akkor ugyanezen alternatívák egymáshoz viszonyított sorrendje a TVSZ eredményében sem változhat meg.
- **Taktikázásbiztos / nem manipulálható:** Egy szavazó nem tud úgy hazudni a saját preferenciasorrendjéről, hogy számára jobb alternatíva jöjjön ki nyertesként, mintha őszintén szavazott volna.

Gibbard-Satterthwaite tétel. Ha van legalább 3 alternatíva, továbbá f szűrjektív (mindegyik alternatíva előáll nyertesként valamilyen Π -re) és taktikázásbiztos, akkor f diktatórikus.

Arrow tétel. Ha van legalább 3 alternatíva, továbbá F egyhangú és független a lényegtelen alternatíváktól, akkor F diktatórikus.

Árverési modell. Legyen $N = \{1, \dots, n\}$ a licitálók halmaza és $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ az alternatívák halmaza. Az i . licitáló valódi értékelőfüggvénye a $\hat{v}_i : A \rightarrow \mathbb{R}$, az egyes alternatívák tényleges értékét adja meg számára, ez privát, a $v_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ pedig az az értékelőfüggvény, amit publikusan közlésszerűen, ez a szavazó licitje. Az i . szavazó őszinte, ha $v_i = \hat{v}_i$.

Az S_i halmaz a lehetséges v_i liciteket tartalmazza, $S = S_1 \times \dots \times S_n$ a lehetséges $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ licitprofilokat.

Az $\mathcal{M}$ árverési mechanizmus egy $\underline{v}$ licitprofilra megmondja, hogy melyik alternatíva fog nyerni és ez az egyes licitálóknak mennyi pénzbe fog kerülni. A nyertes alternatívát az $f : S \rightarrow A$ függvény, az i . licitáló költségét a $p_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ függvény határozza meg.

Az i . licitáló nyereségét ekkor az $u_i(\underline{v}) = \hat{v}_i(f(\underline{v})) - p_i(f(\underline{v}))$ függvény adja meg.

Árverési mechanizmusok tulajdonságai.

- **Taktikázásbiztos / nem manipulálható:** Minden i licitálóra igaz, hogy a többiek bármely $\underline{v}_{-i}$ részleges licitprofilja mellett a szavazó u_i nyereségfüggvényének értéke maximális, ha őszinte, azaz $v_i = \hat{v}_i$ -t licitál.
- **Szubvenciómentes:** A mechanizmus p_i költségfüggvényei nemnegatívak minden i -re.
- **Veszteségmentes:** A mechanizmus p_i költségfüggvényei olyanok, hogyha az i licitáló őszintén licitál, azaz $v_i = \hat{v}_i$, akkor a többiek bármely $\underline{v}_{-i}$ részleges licitprofiljára az $f(\underline{v})$ nyertes alternatíva $p_i(f(\underline{v}))$ költsége nem haladja meg a $\hat{v}_i(f(\underline{v}))$ tényleges értékét.

Vickrey-Clarke-Groves (VCG) mechanizmus, Clarke-szabállyal.

1. Az $f(\underline{v})$ úgy választja meg a nyertes a alternatívát, hogy maximalizálja vele a közjót, azaz a $\sum_i v_i(a)$ összeget.
2. A költségfüggvények pedig

$$p_i(\underline{v}) = h_i(\underline{v}_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(f(\underline{v}))$$

alakúak, ahol $h_i(\underline{v}_{-i})$ egy tetszőleges, a többiek licitjétől függő alapköltség, melyből kivonjuk, hogy a többieknek mennyit ér a nyertes alternatíva.

3. A **Clarke-szabály** a h_i -t az i . licitáló nélkül elérhető maximális közjóként, azaz a többiek maximális elérhető értékeként definiálja:

$$h_i(\underline{v}_{-i}) = \max_{a \in A} \left(\sum_{j \neq i} v_j(a) \right)$$

. Ezzel a p_i költségfüggvény éppen a többiek által az i . játékos jelenléte miatt elszenvedett összelvesztés lesz.

Tétel. A VCG mechanizmus taktikázásbiztos.

Tétel. A VCG mechanizmus Clarke-szabállyal szubvenciómentes és veszteségmentes, ha minden i licitáló $\hat{v}_i$ valódi értékelőfüggvénye nemnegatív.

1. Legyen $A = \{a, b, c\}$ az alternatívák halmaza és $n = 30$ szavazó. A szavazók közül 9-en az $a \succ_1 b \succ_1 c$ preferenciarendezéssel, 10-en az $b \succ_2 a \succ_2 c$, és 11-en az $c \succ_3 a \succ_3 b$ preferenciarendezéssel rendelkeznek.
 - a) Határozzuk meg a többségi szavazás társadalmi választási szabálya által adott eredményt.
 - b) Határozzuk meg a Borda-szavazás társadalmi választási szabálya által adott eredményt.
 - c) Van-e Condorcet-győztes?
 - d) Határozzuk meg a Copeland-szavazás társadalmi választási szabálya által adott eredményt.
2. Legyenek $A = \{a, b, c\}$ az alternatívák és $n = 25$ szavazó. A szavazók közül 5-en az $a \succ_1 b \succ_1 c$ preferenciarendezéssel, 4-en az $a \succ_2 c \succ_2 b$ preferenciarendezéssel, 7-en az $b \succ_3 a \succ_3 c$ preferenciarendezéssel, 9-en pedig az $c \succ_4 b \succ_4 a$ preferenciarendezéssel rendelkeznek.
 - a) Határozzuk meg a többségi szavazás társadalmi választási szabálya által adott eredményt.
 - b) Határozzuk meg a Borda-szavazás társadalmi választási szabálya által adott eredményt.
 - c) Van-e Condorcet-győztes?
 - d) Határozzuk meg a Copeland-szavazás társadalmi választási szabálya által adott eredményt.
3. Határozzuk meg, hogy a többségi szavazás, a Borda-szavazás és a Copeland-szavazás társadalmi választási szabályaira mely tulajdonságok teljesülnek az alábbiak közül:
 - a) szimmetrikus / anonim
 - b) semleges / pártatlan
 - c) egyhangú
 - d) független a lényegtelen alternatíváktól
4. Mutassuk meg, hogy a Borda-szavazás nem Condorcet-konzisztens!
5. Mutassuk meg, hogy a Borda-szavazás manipulálható.
6. Legyen $n \in \mathbb{N}_+$ szavazó és két alternatíva: igen és nem. Tekintsük a „páratlan döntés” társadalmi választási szabályt: pontosan akkor nyer az igen alternatíva, ha páratlan sok szavazatot kapott első helyen. Határozzuk meg, hogy adott n esetén mely tulajdonságok teljesülnek erre a mechanizmusra az alábbiak közül:
 - a) szimmetrikus / anonim
 - b) semleges / pártatlan
 - c) egyhangú
 - d) független a lényegtelen alternatíváktól
 - e) manipulálható
7. Manipulálható-e a Copeland szavazás?
8. Tekintsük a következő társadalmi választási szabályt: ha az első $n - 1$ szavazó preferenciasorrendje megegyezik, akkor ez lesz a társadalmi preferenciasorrend, minden más esetben pedig az n -edik szavazó preferenciasorrendje lesz a társadalmi preferenciasorrend. Manipulálható-e ez a társadalmi választási szabály?

9. Vegyünk egy olyan árverési mechanizmust, ahol egyetlen tárgyat szeretnénk árverésre bocsájtani $n \in \mathbb{N}_+$ licitáló között úgy, hogy azt mindegyik licitáló $C \in \mathbb{N}_+$ értékűnek tartja. Minden i licitálót megkérünk, hogy írja fel egy papírra a saját i -jét, illetve egy C_i értéket, hogy mennyiért szeretné megvenni a tárgyat, úgy hogy azt a többiek ne lássák. Ezután a papírokat összegyűjtjük és a(z egyik) legnagyobb licitet felírónak odaadjuk a tárgyat, a C_i összeget pedig kifizettetjük vele. Mi lesz ennek az árverésnek a modellje? Adjuk meg az A alternatívák halmazát, a $\hat{v}_i, v_i$ függvényeket és a mechanizmus f és p_i függvényeit.
10. Három játékos, A, B és C licitál három tárgyra s -re, t -re és u -ra. Minden játékos legfeljebb egy tárgyat kaphat. A beérkezett liciteket az alábbi táblázat mutatja. Határozzuk meg, hogy a Clarke-szabályos Vickrey–Clarke–Groves-mechanizmussal történő árverezés során kik lesznek a nyertesek, mit fognak ők kapni és mennyit kell fizetniük ezért?

	s	t	u
A	12	8	0
B	9	4	8
C	0	5	10

11. Tekintsünk egy olyan árverést, melynek során $n \in \mathbb{N}_+$ licitáló között egy mindenki számára pozitív értéket képviselő tárgyból árverezünk el $k \in \mathbb{N}_+$, $k < n$ darabot úgy, hogy mindenki legfeljebb egyet kaphat. A nyertes az a k játékos lesz, akik a k legmagasabb licitet tették, az eladási ár pedig mindegyikük számára a $(k + 1)$ -edik legmagasabb licit értéke lesz. Bizonyítsuk be, hogy ez az aukció veszteségmentes, szubvenciómentes és taktikázásbiztos.
12. Bizonyítsuk be, hogy a harmadik áras árverés, melynek során egyetlen tárgyat árverezünk el $n \in \mathbb{N}_+$ játékos mellett ahol $n \geq 3$, nem taktikázásbiztos.
13. A fordított árverés feladatban egy szolgáltatást szeretne megvásárolni valaki: $n \in \mathbb{N}_+$ szolgáltató tesz neki árajánlatot és ezek közül választ egyet. Tetszőleges $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén az i -edik szolgáltatónak a munka elvégzésének költsége $w_i \in \mathbb{R}_0^+$, és ha $t \in \mathbb{R}_0^+$ áron bízzák meg a szolgáltatás elvégzésével, akkor a nyeresége $t - w_i$, ha pedig nem őt bízzák meg, akkor 0. Javasoljuk erre a feladatra egy taktikázásbiztos mechanizmust.
-
14. Lássuk be, hogyha egy F társadalmi választási szabály egyhangú, független a lényegtelen alternatíváktól és $3 \leq |A|$, akkor ha létezik egy extrém alternatíva, akit a Π választási profilban minden szavazó vagy elsőnek vagy utolsónak rangsorolt, akkor $F(\Pi)$ -ben is ez az alternatíva vagy első vagy utolsó lesz.
15. Legyen $3 \leq |A|$. Adott egy társadalmi választási szabály $F(\Pi)$, amely független a lényegtelen alternatíváktól. Tegyük fel, hogy minden különböző $a, b \in A$ alternatívapárra igaz, hogy a szabály vagy ab -egyhangú, vagy ab -anti-egyhangú: ha minden i szavazóra $a \succ_i b$, akkor ha a szabály ab -egyhangú, akkor az eredményre $a \succ b$ teljesül, ha pedig ab -anti-egyhangú akkor az eredményre $a \prec b$ teljesül. Mutassuk meg, hogy ekkor a szabály szükségképpen diktatórikus vagy antidiktatórikus, azaz létezik egyetlen szavazó, akinek a preferenciasorrendje vagy annak a fordítottja lesz a társadalmi választási szabály eredménye.
16. Általánosítsuk a Clarke-szabállyal definiált Vickrey–Clarke–Groves-mechanizmust arra az esetre, aminek során a játékosok több tárgyat is megkaphatnak (de nem kell minden tárgyat megkapnia valakinek). Ebben a felállásban minden játékosnak a tárgyak összes lehetséges részhalmazára van egy értékelése, ami azt fejezi ki, hogy mennyit ér neki az, ha pontosan ezt a részhalmazt kapja meg, és a játékosok a tárgyak összes lehetséges részhalmazára licitálnak. Bizonyítsuk be, hogy ebben a feladatban egy maximális összértékű alternatíva megtalálása még abban az esetben is NP-nehéz, ha minden játékos pontosan egy (de nem feltétlenül ugyanazt) részhalmazt értékel 1 értékűnek, az összes többit viszont 0-ra értékeli.