

Osztozkodási játék. Adott $n \in \mathbb{N}_+$ játékos, akik a $[0, 1)$ intervallumot akarják elosztani egymás között. Az i . játékos az A_i részt kapja, ahol az A_i véges sok, páronként diszjunkt, balról zárt, jobbról nyílt intervallumból áll. Az $(A_1, \dots, A_n)$ elosztásban az egyes A_i -k páronként diszjunktak és az uniójuk kiadja a $[0, 1)$ -et.

Értékelő eloszlásfüggvény. Az i . játékos $f_i: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ értékelő eloszlásfüggvénye monoton növekvő, továbbá $f_i(0) = 0$ és $f_i(1) = 1$.

Értékelő függvény. Az i . játékos értékelő függvénye μ_i , amire $\mu_i([a, b)) = f_i(b) - f_i(a)$, továbbá additív, azaz páronként diszjunkt intervallumok uniójára az intervallumok értékének az összegét adja.

Műveletek. A protokollok a **vág** és a **mér** műveleteket használják, ahol a $\text{mér}_i(x)$ az $f_i(x)$ értékét adja vissza, a $\text{vág}_i(y)$ pedig a $\min\{x \mid f_i(x) = y\}$ -t.

Arányos elosztás. Az $(A_1, \dots, A_n)$ elosztás arányos, ha minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $\mu_i(A_i) \geq \frac{1}{n}$.

Oszt és választ protokoll. Két játékos esetén az egyik játékos a saját értékelő függvénye szerint két egyenlő részre osztja a $[0, 1)$ -et, majd a másik játékos választ ezek közül egy, a saját értékelő függvénye szerinti legjobbat.

Fink-eljárás. Online protokoll. Első körben az 1. játékos megkapja a teljes $[0, 1)$ -et. Az i . körben az i . játékos megérkezik és az $1, \dots, (i-1)$ játékosok mindegyike i darab egyenlő részre osztja a saját részét. Az i . játékos mindenkitől egy, a saját értékelő függvénye szerinti legjobb részt elvesz.

Tasnádi-eljárás. Rekurzív protokoll. Az első játékos a saját értékelő függvénye szerint n egyforma részre osztja az osztandó halmazt, és mind az n részhez előkészít $n-1$ darab jegyet. A többi játékos mindegyike elvesz $n-1$ darab különböző jegyet, kihagyva a saját értékelő függvénye szerinti egyik legrosszabbat. A fennmaradó $n-1$ darab jegyet az első játékos kapja. Ezután az n rész mindegyikén $n-1$ játékos osztozkodik tovább a Tasnádi-eljárással, ebben az első játékos megfelelő multiplicitással vesz részt.

Diszkrét mozgó kése eljárás. Minden játékos megjelöli a saját értékelő függvénye szerint azt a legkisebb $[0, x)$ intervallumot, ami neki $\frac{1}{n}$ -et ér. A legbaloldalibb jelölővel rendelkező játékos megkapja a kért szeletét, a többi játékos a megmaradt intervallumon folytatja az eljárást.

Even–Paz-eljárás. Oszd meg és uralkodj elvű protokoll. Minden játékos megjelöli a saját értékelő függvénye szerinti $\lfloor n/2 \rfloor : \lceil n/2 \rceil$ vágópontot. A játékosokat a jelölőik szerinti növekvő sorrendbe rendezzük (az egyenlőséget véletlenszerűen feloldva) és az első $\lfloor n/2 \rfloor$ játékost balra, a maradék $\lceil n/2 \rceil$ játékost pedig jobbra küldjük. Az intervallumot a balra küldött játékosok maximális jelölőjénél vágjuk, a bal oldali részen a balra küldött játékosok, a jobb oldalin pedig a jobbra küldöttek osztozkodnak tovább, szintén az Even–Paz-eljárással.

Irigységmentes elosztás. Az $(A_1, \dots, A_n)$ elosztás irigységmentes, ha minden $i, j \in \{1, \dots, n\}$ esetén $\mu_i(A_i) \geq \mu_i(A_j)$.

Selfridge-Conway eljárás. Irigységmentes elosztás három játékosra (A, B, C) . Az A harmadol, a B a darabokat sorrendezi és ha van legnagyobb akkor azon igazít: levág belőle annyit, hogy ugyanakkora legyen mint a következő. A levágott maradékot félreteszik. A három fő darabból C, B, A sorrendben választanak egyet-egyet, de B -t megkérjük, hogy ha teheti, akkor az igazítottat előzékenyen ő vigye el (neki ez egy legjobb szelet), ne maradjon az A -ra. Ha C viszi el az igazítottat, akkor a maradékot B harmadolja és C, A, B sorrendben osztznak. Egyébként a B viszi el az igazítottat, ekkor a maradékot a C harmadolja és azokon B, A, C sorrendben osztznak.

Az A biztosan nem lesz irigy az igazított darabot kapóra, hiszen A már az első körben kapott annyit, mint amennyit az igazított és a teljes maradék ér neki. A másokra sem lesz irigy, hiszen az első körben az A osztott, tehát egyformákat vittek el, a második körben pedig az A hamarabb választhatott. B és C sem lehetnek irigyek senkire, hiszen az első körben C választ először, de a B is legalább olyan jól jár a saját szemszögéből, a második körben pedig az egyikőjük az osztó volt, a másikőjük pedig az elsőnek választó.

1. Három játékos osztokodik a $[0, 1)$ intervallumon a Fink-eljárással. A játékosok értékelő eloszlásfüggvénye a következő.

$$f_1(x) = \sqrt{x}, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = x^2$$

Tudjuk, hogy a második játékos megérkezése után az első a $[0, \frac{1}{4})$, a második pedig az $[\frac{1}{4}, 1)$ intervallumot birtokolja. Mondjuk meg, hogy a harmadik játékos körében mit csinál az algoritmus a $[0, \frac{1}{4})$ intervallumon!

2. Három játékos osztokodik a $[0, 1)$ intervallumon a Fink-eljárással. A játékosok értékelő eloszlásfüggvénye a következő.

$$f_1(x) = \begin{cases} 4x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1/4, \\ 1, & \text{ha } 1/4 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = x^3$$

Legyen a legjobboldalabbi kiosztott intervallum az $[a, 1)$. Mennyi az a értéke és ki kapja ezt az intervallumot?

3. Három játékos osztokodik a $[0, 1)$ intervallumon a Tasnádi-eljárással. A játékosok értékelő eloszlásfüggvénye a következő.

$$\text{a) } f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \begin{cases} x/2, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1/2, \\ (3x-1)/2, & \text{ha } 1/2 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad f_3(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1/4, \\ (2x+1)/3, & \text{ha } 1/4 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = x^4$$

Hajtsuk végre a rekurzív algoritmus legkülső függvényhívását: a belső rekurzív hívásokat ne hajtsuk végre, csak adjuk meg milyen paraméterekkel hívja őket a külső hívás.

4. Három játékos osztokodik a $[0, 1)$ intervallumon a diszkrét mozgó késes eljárással. A játékosok értékelő eloszlásfüggvénye a következő.

$$\text{a) } f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = x^4$$

$$\text{b) } f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = \sqrt{x}$$

Legyen a legbaloldalabbi kiosztott intervallum a $[0, b)$. Mennyi a b értéke és ki kapja ezt az intervallumot?

5. Öt játékos osztokodik a $[0, 1)$ intervallumon az Even-Paz eljárással. A játékosok értékelő eloszlásfüggvénye a következő.

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = \sqrt{x}, \quad f_4(x) = x^4, \quad f_5(x) = \min(2x, 1)$$

Hajtsuk végre a rekurzív algoritmus legkülső függvényhívását: a belső rekurzív hívásokat ne hajtsuk végre, csak adjuk meg milyen paraméterekkel hívja őket a külső hívás.

6. Öt játékos osztokodik a $[0, 1)$ intervallumon az Even-Paz eljárással. A játékosok értékelő eloszlásfüggvénye a következő.

$$f_1(x) = \sqrt[5]{x}, \quad f_2(x) = \sqrt[3]{x}, \quad f_3(x) = x^2, \quad f_4(x) = x$$

Legyen a legbaloldalabbi kiosztott intervallum a $[0, c)$. Mennyi a c értéke és ki kapja ezt az intervallumot?

7. Határozzuk meg a $[0, 1[$ intervallum egy irigységmentes elosztását a Selfridge–Conway-eljárással, ha a játékosok értékelő eloszlásfüggvénye a következő.

$$f_A(x) = \sqrt{x}, \quad f_B(x) = \min(2x, 1), \quad f_C(x) = x^2$$

8. Adjunk eljárást arra az esetre, amikor az n játékos nem egyenlő mértékben akar osztani a $[0, 1)$ intervallumon, hanem minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén az i -edik játékoshoz adott egy $d_i \in \mathbb{Z}_+$ követelés, és olyan $(A_1, \dots, A_n)$ elosztást keresünk, melyre tetszőleges $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $\mu_i(A_i) \geq d_i/D$ teljesül, ahol $D := \sum_{i=1}^n d_i$.

9. **ZH 2024, *-os feladat** A $[0, 1)$ intervallumon szeretne irigységmentesen osztzkodni n játékos (ahol n tetszőleges pozitív egész szám). Tudjuk, hogy az első $n - 1$ játékos értékelő eloszlásfüggvénye azonos, azaz $f_1 = \dots = f_{n-1}$, az n -edik játékosról viszont nem tudunk semmit. Javasoljunk hatékony algoritmust a feladat megoldására, és határozzuk meg az eljárás végrehajtásához szükséges mérés- és vágás műveletek számát.

10. Adjunk eljárást arra az esetre, amikor az n játékos úgy akar osztani a $[0, 1)$ intervallumon, hogy tetszőleges $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $\mu_i(A_i) \leq 1/n$ teljesüljön (azaz például torta helyett házimunkán osztznak a játékosok).

11. Vegyük az osztzkodási játék diszkrét változatát: $n \in \mathbb{N}_+$ darab játékos osztzik a $[0, 1)$ intervallumon oly módon, hogy k darab, előre megadott $0 < p_1 < \dots < p_k < 1$ osztópontban vághatnak, ahol $n - 1 \leq k$. Lássuk be, hogy ebben a játékban annak az eldöntése, hogy létezik-e arányos elosztás egy NP-teljes feladat.