

Lineáris programozási feladat.

$$\begin{aligned} \max / \min \quad & c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \\ & a_{1,1} \cdot x_1 + \dots + a_{1,n} \cdot x_n \leq / = / \geq b_1 \\ & \vdots \\ & a_{k,1} \cdot x_1 + \dots + a_{k,n} \cdot x_n \leq / = / \geq b_k \end{aligned}$$

Garantált várható nyereség. Egy játékos adott kevert stratégiájához tartozó garantált várható nyeresége a többi játékos bármely kevert stratégiaválasztása melletti várható nyereségeinek a minimuma.

Maximin stratégia. Egy játékos olyan kevert stratégiáját, amely a garantált várható nyereségét maximalizálja maximin stratégiának nevezzük, az ehhez tartozó maximális garantált várható nyereséget pedig a játékos biztonsági szintjének.

Maximin stratégiák kiszámítása lineáris programozási feladatként. Ha M az oszlopjátékos $(k \times n)$ -es nyereségmátrixa, az $(x_1, \dots, x_n)$ változók a keresett kevert stratégia valószínűségi eloszlását jelölik, az α változó pedig a keresett biztonsági szint, akkor a

$$\begin{aligned} \max \quad & \alpha \\ \text{feltéve} \quad & m_{1,1} \cdot x_1 + \dots + m_{1,n} \cdot x_n \geq \alpha \\ & \vdots \\ & m_{k,1} \cdot x_1 + \dots + m_{k,n} \cdot x_n \geq \alpha \\ & x_1 + \dots + x_n = 1 \\ & x_1, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

lineáris programozási feladat optimális megoldásai a játékos maximin stratégiáinak felelnek meg.

Neumann-tétel. Minden véges, kétszemélyes, **0-összegű** stratégiai játékban az oszlopjátékos biztonsági szintje megegyezik a sorjátékos biztonsági szintjének a (-1) -szeresével.

Tétel. A játékosok maximin stratégiái minden véges, kétszemélyes, 0-összegű stratégiai játékban éppen a kevert Nash-egyensúlyoknak felelnek meg.

Csődprobléma. Adott egy $0 \leq E$ vagyon és n hitelező $0 \leq d_1 \leq \dots \leq d_n$ követelésekkel úgy, hogy $E < \sum_i d_i$. Keressük a vagyon egy lehetséges szétosztását, vagyis olyan $x_1, \dots, x_n$ kifizetéseket, amelyekre $0 \leq x_1, \dots, x_n$ és $\sum_i x_i = E$ teljesülnek.

Arányos szétosztás. A hitelezők a követeléseik arányában részesednek a vagyonból:

$$x_i = E \cdot \frac{d_i}{\sum_j d_j}.$$

Egyenletes nyereségű szétosztás. Keressük azt a λ nyereségértéket, amelyre ha a λ -nál kisebb követelésűek a saját követelésüket, a többiek pedig λ -t kapnak akkor éppen E lesz a kifizetések összege.

Egyenletes veszteségű szétosztás. Keressük azt a μ veszteségértéket, amelyre ha a μ -nél kisebb követelésűek semmit, a többiek pedig a követelésüknél μ -vel kevesebbet kapnak, akkor éppen E lesz a kifizetések összege.

Sorban állásos szétosztás. A hitelezőket egy meghatározott sorrendben szolgáljuk ki, az aktuálisan kiszolgált hitelező a még rendelkezésre álló vagyonból a követelése erejéig részesül.

Kelmeszabály. Két hitelező között a kelmeszabály szerinti szétosztás a következőképpen történik: mindkét hitelező megkapja a saját követelésének a másik által nem követelt részét, a vitatott részen pedig fele-fele arányban osztoznak.



Ha van E -nél nagyobb követelés, azt E méretűként kezeljük.

Kelmeszabály-konzisztens szétosztás. Egy $(x_1, \dots, x_n)$ szétosztás kelmeszabály-konzisztens, ha bármely $i \neq j$ hitelezőpár a nekik összesen kiosztott $x_i + x_j$ vagyonból a d_i és d_j követeléseik alapján a kelmeszabály szerint éppen x_i és x_j részt kapna.

1. Az alábbi mátrixok az **oszlopjátékos** nyereségeit írják le egy-egy 0-összegű stratégiai játékban.
 - a) Írjuk fel az oszlopjátékos maximin stratégiáit leíró lineáris programozási feladatot.
 - b) Írjuk fel a sorjátékos maximin stratégiáit leíró lineáris programozási feladatot.
 - c) Határozzuk meg a játékosok maximin stratégiáit.

$$\begin{array}{ccc} \text{(i)} & \text{(ii)} & \text{(iii)} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 4 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Alább látható egy kétszemélyes, 0-összegű stratégiai játék **oszlopjátékosra** vonatkozó nyereségmátrixa. Mutassuk meg, hogy az $\underline{x} = (7/8, 0, 1/8)^\top$ az oszlopjátékos, és az $\underline{y} = (1/4, 3/4, 0)$ a sorjátékos egy maximin stratégiája.

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 27 \\ 7 & 5 & -1 \\ 6 & \pi & 8 \end{pmatrix}$$

3. Határozzuk meg az alábbi csődp problémákban az arányos, az egyenletes nyereségű, az egyenletes veszteségű, illetve a sorban állás szétosztást. A sorban állás szétosztáshoz legyen 1, 2, 3, 4 a sorrend.

$$\text{(i) } E = 30 \text{ és } (d_1, d_2, d_3, d_4) = (5, 6, 19, 20) \quad \text{(ii) } E = 40 \text{ és } (d_1, d_2, d_3, d_4) = (8, 11, 16, 45)$$

4. Vegyük a $d_1 = 6$ és $d_2 = 10$ követeléseket. Rajzoljuk fel ezen követelések mellett az $E_1 = 16 - \varepsilon$, $E_2 = 10$, $E_3 = 6$ vagyonokhoz tartozó csődjátékok kelmeszabály-illusztrációját, illetve az ezeknek megfelelő közlekedőedényeket, a bennük lévő vízszintekkel együtt.

5. Határozzuk meg az alábbi csődp problémákban a kelmeszabály szerinti szétosztást.

$$\begin{array}{ll} 1. E = 100 \text{ és } (d_1, d_2) = (100, 200) & 2. E = 100 \text{ és } (d_1, d_2) = (50, 70) \\ 3. E = 20 \text{ és } (d_1, d_2) = (4, 18) & 4. E = 20 \text{ és } (d_1, d_2) = (9, 12) \end{array}$$

6. Határozzuk meg az alábbi csődp problémákban a kelmeszabály-konzisztens szétosztást.

$$1. E = 50 \text{ és } (d_1, d_2, d_3, d_4) = (10, 20, 40, 50) \quad 2. E = 80 \text{ és } (d_1, d_2, d_3, d_4) = (20, 30, 40, 50)$$

7. Konstruáljunk közlekedőedény-rendszert az az arányos, az egyenletes nyereségű, az egyenletes veszteségű és a sorban állás szétosztásokra.

8. Piros- és Kékország egymással háborúzik. A csata két szintén zajlik: egy pirosországi és egy kékországi csatán. A Piros Királynak 3, a Kék Királynak 4 serege van. Mindkét király egymástól függetlenül egyidőben eldönti, hogy melyik csatára hány sereget küld, és a két csatát egyszerre vívják meg. Ha ugyanannyi piros és kék sereg sorakozik fel egy csatán, akkor a seregek visszavonulnak és ennek a csatának az eredménye döntetlen. Ha valamelyik király több sereget küld az egyik csatára, akkor ott ő nyeri a csatát és foglyul ejti a másik király összes odaküldött seregét: a megnyert csatáért 20 Ft-ot nyer a másik királytól, valamint minden foglyul ejtett seregért további 10 Ft váltságdíjat is kap tőle.

- a) Legyen a Piros Király az oszlopjátékos! Írjuk fel a nyereségmátrixát.
- b) Írjuk fel az oszlopjátékos maximin stratégiáit leíró lineáris programozási feladatot.

- c) Írjuk fel a sorjátékos maximin stratégiáit leíró lineáris programozási feladatot.
- d) A Piros Király azt tervezi, hogy rendre $(9/68, 23/68, 28/68, 8/68)$ valószínűségekkel küld 0, 1, 2, 3 sereget a pirosországi csatára, a Kék Király pedig $(5/12, 0, 2/12, 0, 5/12)$ valószínűséggel küld 0, 1, 2, 3, 4 sereget ugyanide. Mutassuk meg, hogy ezzel mindketten egy maximin stratégiát választottak.

9. Mutassuk meg, hogy a kelmeszabály monoton, azaz egyetlen hitelező jussa sem csökkenhet a kelmeszabály szerinti szétosztás esetén, ha a követelése vagy a szétosztandó vagyon növekszik.

10. Egy kétszemélyes, 0-összegű stratégiai játékban az oszlopjátékos nyereségmátrixa egy „bűvös négyzet”, azaz egy olyan $(n \times n)$ -es mátrix, melynek minden sorában, illetve minden oszlopában az elemek összege ugyanaz a szám: legyen ez az összeg k . Mutassuk meg, hogy az oszlopjátékos biztonsági szintje k/n .

11. Egy S szétosztási szabály duálisán azt az S^* szétosztási szabályt értjük, melyet úgy kapunk, hogy az összvesztést az S szabály szerint osztjuk szét. Egy S szétosztási szabály önduális, ha $S = S^*$.

- a) Az S szétosztási szabályt megvalósító közlekedőedény-rendszer ismeretében hogyan tudjuk meghatározni az S^* -ot megvalósító közlekedőedény-rendszert?

- b) Hogyan néz ki egy önduális szétosztási szabályt megvalósító közlekedőedény-rendszer?

12. Vegyük azt a kétszemélyes, 0-összegű $(2^n \times 2^n)$ -es stratégiai játékot, ahol a játékosok a $\{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ számok közül választanak egyet, az oszlopjátékos kifizetése pedig a mondott számok nim-összege. Határozzuk meg az oszlopjátékos biztonsági szintjét!

13. Adjunk (egy hagyományos számítógépen futtatható) algoritmust, amely a $d_1, \dots, d_n$ követelések polinoidéjű előfeldolgozása után egy adott E vagyonhoz $O(\log n)$ időben meghatározza a kelmeszabály-konzisztens szétosztásban szereplő maximális kifizetésértéket.