

Kevert stratégia. Az i . játékos S_i stratégiai feletti valószínűségi eloszlást az i . játékos kevert stratégiájának nevezzük és a $\sigma_i : S_i \rightarrow [0, 1]$ függvénnyel jelöljük, ahol $\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$. Az i . játékos lehetséges kevert stratégiáinak halmaza a Δ_i . A tiszta stratégiákat is kevert stratégiának tekintjük, az s_i -t 1 valószínűséggel választó "kevert stratégiát" χ_{s_i} -vel jelöljük.

Várható nyereség. Az i . játékos várható nyereségét a játékosok $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ kevert stratégiaválasztása mellett úgy kapjuk meg, hogy minden lehetséges $s = (s_1, \dots, s_n) \in S$ tiszta stratégiaválasztáshoz tartozó $u_i(s)$ nyereséget megsúlyozzuk annak a bekövetkezési valószínűségével, azaz $\left(\prod_{s_i \in s} \sigma_i(s_i) \right)$ -vel, majd ezeket összegezzük.

$$u_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \left[\left(\prod_{s_i \in s} \sigma_i(s_i) \right) \cdot u_i(s) \right]$$

Tétel: Minden (véges) stratégiai játékban van kevert Nash-egyensúly.

Tétel: Szigorú eliminálás során a kevert Nash-egyensúlyok halmaza nem változik. (Nem tűnik el, nem jön létre új.)

Tétel: Laza eliminálás után kapott kevert Nash-egyensúly az eliminálás előtti játékban is kevert Nash-egyensúly volt. (Nem jön létre új.)

Legjobb tiszta válasz: Egy s_i tiszta stratégia legjobb tiszta válasz a többi játékos σ_{-i} kevert stratégiaválasztására, ha bármely $z_i \in S_i$ esetén

$$u_i(\chi_{s_i}, \sigma_{-i}) \geq u_i(\chi_{z_i}, \sigma_{-i}).$$

Legjobb kevert válasz: Egy σ_i kevert stratégia legjobb kevert válasz a többi játékos σ_{-i} kevert stratégiaválasztására, ha bármely $\varrho_i \in \Delta_i$ kevert stratégiaválasztás esetén

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\varrho_i, \sigma_{-i}).$$

Tétel: A σ_i pontosan akkor legjobb kevert válasz a többi játékos σ_{-i} kevert stratégiaválasztására, ha csak olyan s_i tiszta stratégiák szerepelnek benne $\sigma_i(s_i) > 0$ pozitív együttthatóval, amik legjobb tiszta válaszok σ_{-i} -re.

Következmény: Egy játék tiszta Nash-egyensúlyai egyben kevert Nash-egyensúlyok is.

1. A két Algojáték gyakorlat fogolydilemmát játszik egymás ellen. A 8 órakor kezdődő gyakorlaton 15 hallgató vallana és 10 hallgatna, a 14 órakor kezdődőn 16 hallgató vallana és 13 hallgatna. A két gyakorlatról véletlenszerűen egy-egy hallgatót kiválasztva határozzuk meg az egyes gyakorlatok várható nyereségeit.

	vall	hallgat
vall	$(-6, -6)$	$(0, -10)$
hallgat	$(-10, 0)$	$(-0.5, -0.5)$

2. Határozzuk meg az alábbi stratégiai játékokban az összes tiszta és kevert Nash-egyensúlyt.

- a) **Minecraft:** két játékos eldöntheti, hogy közösen épít egy erődöt vagy egy barlangot rendez be a hegy oldalában. Az erőd csak akkor tud megépülni, ha mindketten részt vesznek benne, a barlangot egyedül is be tudják rendezni.

	erőd	barlang
erőd	$(4, 4)$	$(0, 2)$
barlang	$(2, 0)$	$(1, 1)$

- b) **Háború és béke:** két ország egymástól függetlenül eldönti, hogy háborúba kezd-e a másik ellen.

	háború	béke
háború	$(-1, -1)$	$(0, -2)$
béke	$(-2, 0)$	$(2, 2)$

- c) **Nemek harca:** egy házaspár két tagja egymástól függetlenül dönt arról, hogy balett előadásra vagy focimeccsre menjenek-e.

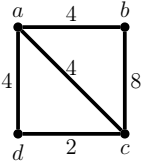
	balett	meccs
balett	$(3, 2)$	$(1, 1)$
meccs	$(0, 0)$	$(2, 3)$

3. Lássuk be, hogy egy (2×2) -es nyereségmátrixú játékban nem létezhet két olyan különböző kevert Nash-egyensúly, melyekben mindkét játékos pozitív valószínűséggel játszza mindkét saját stratégiáját.

4. Határozzuk meg az alábbi stratégiai játékokban az összes tiszta és kevert Nash-egyensúlyt. A megoldás során érdemes az iterált szigorú eliminálást is felhasználni.

1.	<table><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td><td>Z</td></tr><tr><td>A</td><td>$(3, 4)$</td><td>$(5, 3)$</td><td>$(2, 3)$</td></tr><tr><td>B</td><td>$(2, 5)$</td><td>$(3, 9)$</td><td>$(4, 6)$</td></tr><tr><td>C</td><td>$(3, 1)$</td><td>$(2, 5)$</td><td>$(7, 4)$</td></tr></table>		X	Y	Z	A	$(3, 4)$	$(5, 3)$	$(2, 3)$	B	$(2, 5)$	$(3, 9)$	$(4, 6)$	C	$(3, 1)$	$(2, 5)$	$(7, 4)$	2.	<table><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td><td>Z</td></tr><tr><td>A</td><td>$(5, 3)$</td><td>$(4, 3)$</td><td>$(1, 1)$</td></tr><tr><td>B</td><td>$(2, 4)$</td><td>$(3, 4)$</td><td>$(6, 2)$</td></tr><tr><td>C</td><td>$(2, 5)$</td><td>$(3, 5)$</td><td>$(4, 7)$</td></tr></table>		X	Y	Z	A	$(5, 3)$	$(4, 3)$	$(1, 1)$	B	$(2, 4)$	$(3, 4)$	$(6, 2)$	C	$(2, 5)$	$(3, 5)$	$(4, 7)$
	X	Y	Z																																
A	$(3, 4)$	$(5, 3)$	$(2, 3)$																																
B	$(2, 5)$	$(3, 9)$	$(4, 6)$																																
C	$(3, 1)$	$(2, 5)$	$(7, 4)$																																
	X	Y	Z																																
A	$(5, 3)$	$(4, 3)$	$(1, 1)$																																
B	$(2, 4)$	$(3, 4)$	$(6, 2)$																																
C	$(2, 5)$	$(3, 5)$	$(4, 7)$																																

5. Egy számítógépes hálózat csúcspontjai és a közöttük lévő irányítatlan összeköttetések az alábbi ábrán láthatóak. Két szolgáltató van jelen, az egyikőjük az a és c , a másikójuk pedig a b és d csúcsok között szolgáltat. Az élekre ráírtuk azok üzemeltetési költségeit. A szolgáltatók választanak egy **utat** a saját csúcsaik között és az ahhoz tartozó élek üzemeltetéséért fizetnek. Ha egy élet **mindkét** szolgáltató kiválasztotta, akkor a költségeket **elfelezik** egymás között. Az élek megfelelően nagy kapacitással rendelkeznek a két szolgáltató együttes kiszolgálásához. Írjuk fel a feladathoz tartozó nyereségmátrixot és határozzuk meg a tiszta és kevert Nash-egyensúlyokat a játékban!

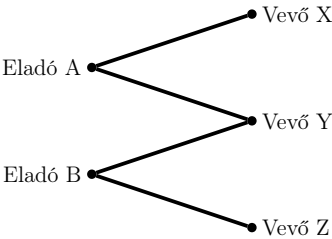


6. **Szarvas-liba vadászat:** Egy vadászklubban n vadász egymástól függetlenül dönt, hogy szarvasra vagy libára megy vadászni. A szarvasvadászat csak akkor sikeres, ha mindannyian ezt az opciót választják, ekkor fejenként 100 Ft-ot kapnak. Ha ennél kevesebben választják ezt az opciót, akkor ők 0 Ft-ot kapnak érte. A libavadászat legalább egy résztvevő esetében már sikeres és fejenként 2 Ft-ot ér a résztvevőknek. Keressük meg a szimmetrikus kevert Nash-egyensúlyokat, vagyis azokat a kevert Nash-egyensúlyokat, ahol minden játékos ugyanazt a kevert stratégiát alkalmazza.

7. Előadáson láttuk, hogy az alábbi nyereségmátrixszal adott kő-papír-olló játékban az a kevert stratégiaválasztás, melyben mindkét játékos a $(\sigma(\text{kő}), \sigma(\text{papír}), \sigma(\text{olló})) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ kevert stratégia szerint játszik, kevert Nash-egyensúly. Lássuk be, hogy ettől különböző kevert Nash-egyensúly nincs a játékban.

	kő	papír	olló
kő	$(0, 0)$	$(-1, 1)$	$(1, -1)$
papír	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, -1)$
olló	$(1, -1)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$

8. * **Árazási játék:** Tegyük fel, hogy egy piacon két eladó, A és B , illetve három vevő, X , Y és Z vannak jelen. Mindegyik vevő fejenként pontosan egy darab terméket szeretne venni. Az X kizárólag az A -tól, a Z pedig kizárólag a B -től hajlandó megvenni a terméket. Az Y attól függően választ, hogy az A vagy a B árulja olcsóbban, egyenlőség esetén az A -tól fog vásárolni. Az eladók egymástól függetlenül döntenek, hogy a saját termékeiket milyen $p_A, p_B \in [0, 1]$ áron adják, ezután ilyen áron kell azt kínálniuk az összes vevőjüknek. Az eladóknak van elegendő mennyiségű termékeik raktáron, hogy minden vevői igényt ki tudjanak szolgálni. Az eladók nyeresége az általuk eladott termékek vételárainak az összege (a termékek gyártási költsége 0). Igazoljuk, hogy a játékban nincs se tiszta, se kevert Nash-egyensúly!



9. * Két játékos választ egy-egy számot az $\{1, \dots, n\}$ halmazból, ahol $n \geq 2$ egy tetszőleges egész szám. Ha a két szám megegyezik, akkor a sorjátékos 1 pontot, az oszlopjátékos -1 pontot kap; minden más esetben pedig senki sem kap pontot. Határozzuk meg a tiszta és kevert Nash-egyensúlyokat.