

Stratégiai játék: Adott $n \in \mathbb{N}_+$ játékos, és tetszőleges $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén adott az i -edik játékoshoz a lehetséges stratégiáinak egy S_i halmaza, valamint egy $u_i: S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$ nyereségfüggvény. Minden játékos ismeri a többiek lehetséges stratégiáit és nyereségfüggvényeit. A játék egy körből áll, amiben a játékosok egymástól függetlenül választanak egy-egy stratégiát azzal a céllal, hogy maximalizálják a saját nyereségüket.

Gyenge dominálás: Az i . játékos $z \in S_i$ stratégiája gyengén dominálja a $z' \in S_i$ stratégiáját, ha a többi játékos tetszőleges $s_1 \in S_1, \dots, s_{i-1} \in S_{i-1}, s_{i+1} \in S_{i+1}, \dots, s_n \in S_n$ stratégiaválasztása esetén

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, z, s_{i+1}, \dots, s_n) \geq u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, z', s_{i+1}, \dots, s_n).$$

Erős dominálás: Az i . játékos $z \in S_i$ stratégiája erősen dominálja a $z' \in S_i$ stratégiáját, ha a többi játékos tetszőleges $s_1 \in S_1, \dots, s_{i-1} \in S_{i-1}, s_{i+1} \in S_{i+1}, \dots, s_n \in S_n$ stratégiaválasztása esetén

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, z, s_{i+1}, \dots, s_n) > u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, z', s_{i+1}, \dots, s_n).$$

Pareto-optimális stratégiaválasztás: Az $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ stratégiaválasztás Pareto-optimális, ha nem létezik olyan $(s'_1, \dots, s'_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ stratégiaválasztás, melyre a következők teljesülnek:

- minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $u_i(s_1, \dots, s_n) \leq u_i(s'_1, \dots, s'_n)$, és
- létezik olyan $j \in \{1, \dots, n\}$, hogy $u_j(s_1, \dots, s_n) < u_j(s'_1, \dots, s'_n)$.

Tiszta Nash-egyensúly: Az $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ stratégiaválasztás tiszta Nash-egyensúly, ha minden $i \in \{1, \dots, n\}$ és $s'_i \in S_i$ esetén

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n) \geq u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n).$$

Iterált szigorú eliminálás: A játékban részt vevő bármely játékos erősen dominált stratégiáját töröljük, és ezt ismételjük mindaddig, amíg van olyan játékos, akinek maradt még erősen dominált stratégiája.

Iterált laza eliminálás: A játékban részt vevő bármely játékos gyengén dominált stratégiáját töröljük, és ezt ismételjük mindaddig, amíg van olyan játékos, akinek maradt még gyengén dominált stratégiája.

Tétel: Az iterált szigorú eliminálást tetszőleges sorrendben végezve ugyanazt a játékot kapjuk.

Tétel: Iterált szigorú eliminálással nem törölünk olyan stratégiát, ami szerepel tiszta Nash-egyensúlyban.

1. **Fogolydilemma:** Egy súlyos bűntény kapcsán letartóztat két gyanúsítottat a rendőrség. A vádemeléshez nincs elegendő bizonyíték, ezért elkülönítik őket egymástól és mindkettejüknek ugyanazt az ajánlatot teszik. Ha vallomást tesznek, miközben a társuk hallgat, akkor szabadon engedik őket, a társuk pedig 10 év börtönt kap. Ha mindketten vallanak, akkor fejenként 6 évet kapnak. Ha mindketten hallgatnak, akkor egy kisebb bűntényért fejenként 6 hónapot kapnak.

- a) Adjuk meg ennek a stratégiai játéknak a nyereségmátrixát!
- b) Határozzuk meg a tiszta Nash-egyensúlyokat a játékban.
- c) Határozzuk meg a Pareto-optimális stratégiaválasztásokat a játékban.

2. Egy kétszemélyes, zérőösszegű játékban a sorjátékos kifizetéseit az alábbi A mátrix adja meg. Ennek az i . sor, j . oszlopbeli $a_{i,j}$ cellája azt a kifizetést jelöli, amelyet a sorjátékos kap, ha ő a saját i . stratégiáját, az oszlopjátékos pedig a saját j . stratégiáját választja.

- a) Végezzük el a mátrixon az iterált szigorú eliminálást!
- b) Van-e tiszta Nash-egyensúly az eliminálás után kapott játékban? És az eredetiben?

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. **Tószennyezés:** Egy tó köré épült három gyár dönt arról, hogy szennyezzék vagy tisztítsák-e a tó vizét a következő évben. A vizet szennyezni ingyenes, a tisztítás azonban 1 egységnyi pénzbe kerül. Továbbá, ha legalább két gyár szennyez, akkor a tó vize súlyosan elszennyeződik, és minden gyárnak külön-külön 3 egységnyi pénzbüntetést kell fizetnie.

- a) Határozzuk meg a tiszta Nash-egyensúlyokat a játékban.
- b) Határozzuk meg a Pareto-optimális stratégiaválasztásokat a játékban.

4. Mutassunk példát olyan stratégiai játékra, melynek a nyereségmátrixában minden kifizetés-vektor különböző, de az iterált laza eliminálás után akármelyik stratégiaválasztás megmaradhat benne egyetlenként.

5. **Választás:** Egy választáson két jelölt indul, A és B , a választók száma pedig $n \in \mathbb{N}_+$. Minden választónak 2 pontot ér, ha az ő támogatottja nyer, -2 pontot ér, ha a támogatottja veszít, és 0 pontot ér, ha a választás döntetlennel zárul. Ezen felül minden választónak 1 pontjába kerül elmenni szavazni.

- a) Határozzuk meg a tiszta Nash-egyensúlyokat, ha $n = 2$ választó van, és közülük az egyik A -t, a másik pedig B -t támogatja.
- b) Határozzuk meg a tiszta Nash-egyensúlyokat, ha $n = 3$ választó van, és közülük ketten A -t támogatják, a harmadik pedig B -t.

6. Két diák csoportmunkában házi feladatot ír. A leadás előtti napon mindkét diák egyénileg választ: elmegy a házi feladaton dolgozni a könyvtárba, vagy inkább bulizni megy a barátokkal.

- Ha legalább az egyikük dolgozik, akkor a feladat hibátlanul elkészül ami mindkettőjüknek fejenként 10 pontnyi örömet szerez. Ha egyikük sem dolgozik, akkor a feladat nem készül el és ezért mindketten fejenként -2 pontot kapnak.
- Ezen felül az egyedül végzett munka -7 pontot ér az erőfeszítés miatt, a közös munka mindkettőjüknek fejenként -2 pontba kerül.
- A bulizásért kapott pontot egy $p \in \mathbb{R}$ paraméter határozza meg.

A diákok nyereségfüggvénye a megfelelő részpontszámok összegéből adódik. A döntés előtt nem kommunikálnak egymással. Írjuk fel a nyereségmátrixot és p minden lehetséges értékére döntsük el, hogy mik a Pareto-optimális stratégiaválasztások!

7. Mutassuk meg, hogy bármely A és B nyereségmátrixszal adott kétszemélyes stratégiai játékhoz megadható egy olyan C nyereségmátrixú kétszemélyes stratégiai játék, amiből az A , illetve a B nyereségmátrixú játékok bármelyike megkapható laza eliminálások ismételt alkalmazásával.

8. Tegyük fel, hogy a **Tószennyezés** játékban a 3. gyár tudja a másik két gyárról, hogy azok egymástól függetlenül p valószínűséggel döntenek úgy, hogy tisztítják a tó vizét. Határozzuk meg minden $p \in [0, 1]$ értékre, hogy ekkor milyen döntéssel jár jobban a 3. gyár.

9. Határozzuk meg a **Választás** játékban tetszőleges $n = 2k$ esetén a tiszta Nash-egyensúlyokat, ha k darab választó az A -t, a maradék k darab pedig a B -t támogatja.

10. **Közlegelők tragédiája:** Egy falu melletti legelőn tíz gazda legelteti egy-egy tehenét. Kezdetben mindegyik tehen jőllakik és napi 10 liter tejet ad. Mindegyik gazdának van elég pénze, hogy vegyen egy új tehenet és azt is kihajtsa a legelőre. Mindegyik gazda eldöntheti, hogy megteszi-e ezt vagy sem. Minnél több tehen van a legelőn, annál kevesebb tejet adnak fejenként: ha a tehenek száma $k \in \{10, 11, \dots, 20\}$, akkor mindegyik tehen napi $(20 - k)$ liter tejet ad. Egy gazda kifizetése megegyezik a birtokában lévő tehen vagy tehenek napi össztermelésével.

- a) Határozzuk meg a tiszta Nash-egyensúlyokat a játékban.
- b) Határozzuk meg a Pareto-optimális stratégiaválasztásokat a játékban.