

Sprague-Grundy tétel, Stratégialopás

ALGORITMIKUS JÁTÉKELMÉLET

2. gyakorlat

2025.

Sprague–Grundy-tétel. Ha a $G = (V, E)$ és $G' = (V', E')$ gráfokkal rendelkező éles kombinatorikus játékok Grundy-számozása rendre $g: V \rightarrow \mathbb{N}$ és $g': V' \rightarrow \mathbb{N}$, akkor a két játék összegének Grundy-számozása $g \oplus g': V \times V' \rightarrow \mathbb{N}$.

Bouton-tétel. Legyen $k \in \mathbb{N}_+$ és tekintsük azt a k -nim játékot, amiben a kupacok méretei $n_1, n_2, \dots, n_k$. Ekkor a második játékosnak pontosan akkor van nyerő stratégiája, ha $n_1 \oplus n_2 \oplus \dots \oplus n_k = 0$.

Kombinatorikus játékok izomorfíája. A (G, N_W, N_T, N_L, v_0) és $(G', N'_W, N'_T, N'_L, v'_0)$ kombinatorikus játékokat izomorfaknak nevezzük, ha létezik olyan gráfizomorfizmus G és G' között, melyben az N_W és N'_W halmazok, valamint az N_T és N'_T halmazok, továbbá az N_L és N'_L halmazok, illetve v_0 és v'_0 csúcsok is egymásnak felelnek meg.

Kombinatorikus játékok ekvivalenciája. A J és J' éles kombinatorikus játékokat ekvivalensnek nevezzük, ha $J + J'$ egy II-es típusú játék.

Hex. Adott egy $(n \times n)$ -es hatszögrács, ahol $n \in \mathbb{N}_+$, és a soron következő játékos kiválasztja ennek egy (korábban még egyik játékos által sem választott) mezejét. A kezdőjátékos akkor nyer, ha keletkezik az általa kiválasztott mezőkből egy út a rács bal szélétől a jobbig, a másik játékos pedig akkor nyer, ha keletkezik az általa kiválasztott mezőkből egy út a rács felső szélétől az alsóig.

Hex tétel (Hein, Nash, Gale). A hex játék sohasem végződhet döntetlennel.

Sprague-Grundy tétel, Stratégialopás

ALGORITMIKUS JÁTÉKELMÉLET

2. gyakorlat

2025.

Sprague–Grundy-tétel. Ha a $G = (V, E)$ és $G' = (V', E')$ gráfokkal rendelkező éles kombinatorikus játékok Grundy-számozása rendre $g: V \rightarrow \mathbb{N}$ és $g': V' \rightarrow \mathbb{N}$, akkor a két játék összegének Grundy-számozása $g \oplus g': V \times V' \rightarrow \mathbb{N}$.

Bouton-tétel. Legyen $k \in \mathbb{N}_+$ és tekintsük azt a k -nim játékot, amiben a kupacok méretei $n_1, n_2, \dots, n_k$. Ekkor a második játékosnak pontosan akkor van nyerő stratégiája, ha $n_1 \oplus n_2 \oplus \dots \oplus n_k = 0$.

Kombinatorikus játékok izomorfíája. A (G, N_W, N_T, N_L, v_0) és $(G', N'_W, N'_T, N'_L, v'_0)$ kombinatorikus játékokat izomorfaknak nevezzük, ha létezik olyan gráfizomorfizmus G és G' között, melyben az N_W és N'_W halmazok, valamint az N_T és N'_T halmazok, továbbá az N_L és N'_L halmazok, illetve v_0 és v'_0 csúcsok is egymásnak felelnek meg.

Kombinatorikus játékok ekvivalenciája. A J és J' éles kombinatorikus játékokat ekvivalensnek nevezzük, ha $J + J'$ egy II-es típusú játék.

Hex. Adott egy $(n \times n)$ -es hatszögrács, ahol $n \in \mathbb{N}_+$, és a soron következő játékos kiválasztja ennek egy (korábban még egyik játékos által sem választott) mezejét. A kezdőjátékos akkor nyer, ha keletkezik az általa kiválasztott mezőkből egy út a rács bal szélétől a jobbig, a másik játékos pedig akkor nyer, ha keletkezik az általa kiválasztott mezőkből egy út a rács felső szélétől az alsóig.

Hex tétel (Hein, Nash, Gale). A hex játék sohasem végződhet döntetlennel.

Sprague-Grundy tétel, Stratégialopás

ALGORITMIKUS JÁTÉKELMÉLET

2. gyakorlat

2025.

- Adott egy $n \in \mathbb{N}_+$ szám. A soron következő játékos kiválasztja n egy osztóját oly módon, hogy a választott szám egyik osztója sem szerepelt korábban. Az veszít, aki az 1-et mondja. Bizonyítsuk be, hogy $n > 1$ esetben a kezdőjátékosnak van nyerő stratégiája.
- Mely $n \in \mathbb{N}_+$ számok esetén lesz az 1. feladatban leírt, úgynevezett osztójáték izomorf egy mérgezett csoki játékkal?
- Bizonyítsuk be, hogy a J_1 és J_2 éles kombinatorikus játékok pontosan akkor ekvivalensek, ha tetszőleges H éles kombinatorikus játék esetén $J_1 + H$ és $J_2 + H$ azonos típusúak.
- * Tegyük fel, hogy van három éles kombinatorikus játékunk: J_1, J_2, J_3 . Tudjuk, hogy $J_1 + J_2$ és $J_2 + J_3$ egyaránt II-es típusú. Adott két program, amelyek rendre a $J_1 + J_2$, illetve a $J_2 + J_3$ játékban valószínűsítják meg a második játékos nyerő stratégiáját interaktív módon: a bemenetükön várják az első játékos következő lépését, ha ezt megkapják, akkor pontosan 1 másodperc múlva kiírják a második játékos választát. Ezen programok felhasználásával készíts egy hasonló interaktív programot, ami a $J_1 + J_3$ játékban tud második játékosként nyerni.
- Mutassuk meg, hogy az éles kombinatorikus játékok ekvivalenciája valóban egy ekvivalenciareláció, azaz reflexív, szimmetrikus és tranzitív.
- Mutassuk meg, hogy tetszőleges $k \in \mathbb{N}_+$ esetén ha k -nimben hozzáveszünk a meglévő kupacokhoz két további, egyforma méretű kupacot, akkor a játék lényegében nem változik, azaz ugyanannak a játékosnak lesz nyerő stratégiája, mint korábban.
 - * Adott $n \in \mathbb{N}_+$ pénzérme egymás mellett egy sorban, mindegyik vagy fejjel, vagy írással felfelé. A soron következő játékos átfordít egy tetszőleges fejet írásra, valamint egy ettől jobbra lévő tetszőleges érmét átfordíthat az ellenkezőjére (ha akar). Az veszít, aki nem tud lépni (vagyis amikor mindegyik érme írással van felfelé). Kinek van nyerő stratégiája?
- Adott $n \in \mathbb{N}_+$ pénzérme egymás mellett egy sorban, mindegyik vagy fejjel, vagy írással felfelé. A soron következő játékos választ egy fejet, és azt, illetve az összes tőle jobbra lévő érmét átfordítja az ellenkezőjére. Az veszít, aki nem tud lépni (vagyis amikor mindegyik érme írással van felfelé). Kinek van nyerő stratégiája?
- ZH 2024:** Két játékos játszik $n \times n$ -es táblán hexet, ahol n tetszőleges pozitív egész szám. A második játékosnak lehetősége van az első lépésében a kezdőjátékos által kiszínezett mezőt a saját színére átszínezni. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?
- Mutassuk meg, hogy egy hexhez hasonló, de $(n \times n)$ -es négyzetrácsra játszott játékban $n \geq 2$ esetben mindkét játékosnak van nemvesztő stratégiája.
 - Adjuk meg a második játékos egy lehetséges nemvesztő stratégiáját.
- Tekintsük a „fordított hex” játékot, ahol az a játékos veszít, aki megépít egy olyan utat, amivel a hexben nyert volna.
 - Mutassuk meg, hogy ha n páros, akkor a kezdőjátékosnak van nyerő stratégiája.
 - Mutassuk meg, hogy ha n páratlan, akkor a második játékosnak van nyerő stratégiája.

Sprague-Grundy tétel, Stratégialopás

ALGORITMIKUS JÁTÉKELMÉLET

2. gyakorlat

2025.

- Adott egy $n \in \mathbb{N}_+$ szám. A soron következő játékos kiválasztja n egy osztóját oly módon, hogy a választott szám egyik osztója sem szerepelt korábban. Az veszít, aki az 1-et mondja. Bizonyítsuk be, hogy $n > 1$ esetben a kezdőjátékosnak van nyerő stratégiája.
- Mely $n \in \mathbb{N}_+$ számok esetén lesz az 1. feladatban leírt, úgynevezett osztójáték izomorf egy mérgezett csoki játékkal?
- Bizonyítsuk be, hogy a J_1 és J_2 éles kombinatorikus játékok pontosan akkor ekvivalensek, ha tetszőleges H éles kombinatorikus játék esetén $J_1 + H$ és $J_2 + H$ azonos típusúak.
- * Tegyük fel, hogy van három éles kombinatorikus játékunk: J_1, J_2, J_3 . Tudjuk, hogy $J_1 + J_2$ és $J_2 + J_3$ egyaránt II-es típusú. Adott két program, amelyek rendre a $J_1 + J_2$, illetve a $J_2 + J_3$ játékban valószínűsítják meg a második játékos nyerő stratégiáját interaktív módon: a bemenetükön várják az első játékos következő lépését, ha ezt megkapják, akkor pontosan 1 másodperc múlva kiírják a második játékos választát. Ezen programok felhasználásával készíts egy hasonló interaktív programot, ami a $J_1 + J_3$ játékban tud második játékosként nyerni.
- Mutassuk meg, hogy az éles kombinatorikus játékok ekvivalenciája valóban egy ekvivalenciareláció, azaz reflexív, szimmetrikus és tranzitív.
- Mutassuk meg, hogy tetszőleges $k \in \mathbb{N}_+$ esetén ha k -nimben hozzáveszünk a meglévő kupacokhoz két további, egyforma méretű kupacot, akkor a játék lényegében nem változik, azaz ugyanannak a játékosnak lesz nyerő stratégiája, mint korábban.
 - * Adott $n \in \mathbb{N}_+$ pénzérme egymás mellett egy sorban, mindegyik vagy fejjel, vagy írással felfelé. A soron következő játékos átfordít egy tetszőleges fejet írásra, valamint egy ettől jobbra lévő tetszőleges érmét átfordíthat az ellenkezőjére (ha akar). Az veszít, aki nem tud lépni (vagyis amikor mindegyik érme írással van felfelé). Kinek van nyerő stratégiája?
- Adott $n \in \mathbb{N}_+$ pénzérme egymás mellett egy sorban, mindegyik vagy fejjel, vagy írással felfelé. A soron következő játékos választ egy fejet, és azt, illetve az összes tőle jobbra lévő érmét átfordítja az ellenkezőjére. Az veszít, aki nem tud lépni (vagyis amikor mindegyik érme írással van felfelé). Kinek van nyerő stratégiája?
- ZH 2024:** Két játékos játszik $n \times n$ -es táblán hexet, ahol n tetszőleges pozitív egész szám. A második játékosnak lehetősége van az első lépésében a kezdőjátékos által kiszínezett mezőt a saját színére átszínezni. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?
- Mutassuk meg, hogy egy hexhez hasonló, de $(n \times n)$ -es négyzetrácsra játszott játékban $n \geq 2$ esetben mindkét játékosnak van nemvesztő stratégiája.
 - Adjuk meg a második játékos egy lehetséges nemvesztő stratégiáját.
- Tekintsük a „fordított hex” játékot, ahol az a játékos veszít, aki megépít egy olyan utat, amivel a hexben nyert volna.
 - Mutassuk meg, hogy ha n páros, akkor a kezdőjátékosnak van nyerő stratégiája.
 - Mutassuk meg, hogy ha n páratlan, akkor a második játékosnak van nyerő stratégiája.