Gradus Vol 4, No 1 (2017) 219-226
ISSN 2064-8014

EGY SZÁMELMÉLETI JÁTÉK ÉS TANULSÁGAI

A NUMBER THEORETICAL GAME AND ITS LESSONS

Szüleim Emlékére

Dedicated to the Memory of my Parents

Molnár Emil

Geometria Tanszék, Matematika Intézet, Természettudományi Kar, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Magyarország

Kulcsszavak:
Számjáték,
nyerő stratégia;
Párhuzamok az axiómarendszerrel,
feladat-megoldással

Keywords:
Game with numbers,
winning strategy;
Analogies
with axiomatics and
problem solving

Cikktörténet:
Beérkezett 2015. október 10.
Átdolgozva 2015. október 31.
Elfogadva 2015. november 5.

Összefoglalás

Édesapám, *Molnár Ernő* (1912-1994), a Győri Révai Miklós Gimnázium egykori tanára – korábban a Kecskeméti Pedagógus Árvaház nevelője (ahova én is megszülettem 1943-ban) – játszotta velem (1957 körül) a bevezetésben leírt játékot. A játék „messzemenő" tanulságai, a sakkjátékkal és persze a matematikával is összevetve, tán „örökre” végig kísérnek. Alig várom, hogy unokáimmal is játszhassam majd!

Abstract

My father, *Ernő Molnár* (1912-1994), the late teacher of the Gymnasium Miklós Révai of Győr – previously he was a foster-father of The Orphan Home of Kecskemét (where I was born to in 1943) – played with me (about 1957) the game described in the introduction. The far-extending lessons of this game, comparing with the chess and with mathematics as well, accompany me since that time, maybe „forever”. I am expecting for the time, when I can play this game with my grandchildren!

1. Bevezetés

A sakkjátékban 32 figura van. Két játékos felváltva veszi el a sakkfigurákat, legalább egyet, de legfeljebb négyet. Az nyer, aki az utolsó figurát elveszi.

In the chess game we have 32 figures. Two players consecutively take off the figures, each at least 1 piece, at most 4 pieces. The winner is the one who takes off the last figure(s).

A játék átfogalmazása

Mindjárt az elején átfogalmazzuk játékunkat úgy, hogy papírral és ceruzával két gyermek is játszhassa, vagy még inkább a táblán krétával játszhassa az előadó a hallgatóság képviselőjével, mint itt most ezen a konferencián. Vagy egy általános iskolai osztályban a tanár játszhatta valamelyik tanulóval, mint ahogy az velem is megtörtént, amikor tanárjelölt voltam (több mint 50 évvel ezelőtt).

Látni fogjuk, hogy a számokra történő áttérés a játékot is megkönnyíti (ez az absztrakció egyik előnye)!

A játék elején felírjuk a 32 kezdőszámot (ezt N jelöli) a táblára. A tanulónak, mint kezdőjátékosnak (**B** jelöli) kell felírnia a következő számot úgy, hogy az legalább a = 1 -el, de legfeljebb A = 4 -el kisebb legyen a N = 32 kezdőszámnál. Ezután jön a tanár, mint második (**S** jelöli), akinek az előbb rögzített szabályok szerint kell kisebbet írnia a táblán lévő új számnál, és így tovább. *Az nyer, aki a* 0 *–t (nullát) felírja a táblára a játék végén.*

2. Egy játék elemzése

Mondjuk, az elején a **B** tanuló felírja a 29 -es számot, aztán az **S** tanár következik: 28, és így tovább, **B**: 24, **S**: 20, **B**: 16, **S**: 15, **B**: 12, **S**: 10, **B**: ?.

1. Közeledik a végjáték, és a tanuló rájön, hogy veszíteni fog. Hiszen bármelyiket is írja fel **B** a 9, 8, 7, 6 számok közül, **S** az 5 –öt írja fel, és legközelebb a 0 –t, bármit is választ **B** a 4, 3, 2, 1 közül. Ezután elemezhetjük a játék táblai *jegyzőkönyvét*. Hol vesztette el **B**, illetve nyerte meg **S** a játékot?

2. Tehát *a játék elemzését ellenkező irányban végezzük, a végén kezdve haladunk az elejéig*. Hamar kiderül, hogy **S** már akkor megnyerte a játékot, amikor a 20 –t felírta, hiszen utána – a szabályok szerint – következetesen írhatta a 15, 10, 5, 0 számokat. Természetesen **B** nyerhetett volna, ha ő írja fel a 25 –öt, sőt korábban a 30 számot a játék elején.

3. Ezután a **B** *tanuló, mint kezdő, meg tudja fogalmazni nyerőstratégiáját*. Először a 30 számot írja fel a táblára, majd a 25, 20, 15, 10, 5, 0 következik. És ezt megteheti a játék szabályai szerint, hiszen $a = 1$, $A = 4$ miatt $A + a = 5$ –tel tudja előző számát csökkenteni, és $32 = 6 \times 5 + 2$ a maradékos osztás szerint. Hiszen a maradék 2 lesz, ha az $N = 32$ kezdőszámból egymásután elveszünk $A + a = 5$ –öt.

4. Természetesen *a második játékos,* **S** *nyerhetett volna, ha* $N = 30$ lett volna a kezdőszám. Vagy $N = 32$ esetében, ha a legnagyobb kivonható szám $A = 7$ (vagy 3, 15, 31) lett volna, mivel $32 = 4 \times 8$ (8×4, 2×16, 1×32).

5. Összefoglalhatjuk a játék lényegét a játékszabályok, vagyis $N, A, a \in \mathbf{N}$ (a természetes számok halmazának jele) $N > A > a > 0$ ismeretében. Tegyük fel, hogy

$$N = k \times (A + a) + r \quad (r, k \in \mathbf{N}, \quad 0 \le r < A + a)$$

a maradékos osztás (vagy egymásutáni kivonások) r maradéka.

i) **B** nyer*,* ha $a \le r \le A$. Ebben az esetben először az $N - r = k \times (A + a)$ számot írja fel, majd így tovább, a $A + a$ számot és a 0 -t, ez a **B** kezdőjátékos nyerőstratégiája.

ii) **S** *nyer* (vagyis **B** veszít), ha $r = 0$.

iii) Ha $0 < r < a$ *vagy* $A < r < A + a$*, akkor a* **B***, és a* **S** *játékosnak sincs nyerőstratégiája (de mindketten elérhetik a döntetlent – remis, franciául –, ha az utolsóra a-nál kevesebb,* 0*-nál több marad).* Ugyanis a **B** a –val csökkent, ha $0 < r < a$ (és $A + a < N$); és A –val csökkent, ha $A < r < A + a$. Ugyanígy tesz **S**, amikor ő következik. *Ha valamelyikük nagyot hibázik, a másik nyerhet, de több döntetlen helyzet is van, ha* $1 < a$ *elég nagy.*

Számelméleti megjegyzések

Nyilvánvaló, hogy a játékszabályokat megváltoztathatjuk úgy, hogy valamelyik játékosnak, a (kezdő) **B** tanulónak, vagy a (második) **S** tanárnak kedvezzen.

Ha a kezdő **B** mondja meg a $N > A > a > 0$ számokat, akkor ő nyer. Ha először **B** rögzíti N -et, **S** választja A -t és a *-t* , akkor **S** fog nyerni.

Hogy a döntetlent kizárjuk, tegyük fel, hogy $a = 1$. Hogy a könnyű játékot kizárjuk, legyen $N >> A$, vagyis a kezdőszám „sokkal” nagyobb, mint a maximális kivonható szám. *Ekkor a prímszámok is szerephez jutnak.* Ha **B** a N kezdőszámot *prímszámnak* választja, például 31, akkor **S** *nem tud olyan A számot mondani, hogy ő nyerjen*, hiszen $A = 30$ nyilván nem lenne *sportszerű szabály*.

És így tovább, *ezt a játékot teljesen kielemeztük.*

3. Más játékok, a sakkjáték

Néhány általános megállapítást is tehetünk a *kétszemélyes játékokra*, például a sakkra, és bizonyos *egyszemélyes játékokra* (rejtvényekre, feladványokra), például a *Rubik-kocka* visszarendezésére, de az utóbbiakkal most nem foglalkozunk.

A sakkjáték jól ismert szabályai már több mint ezer évesek. Ezekhez bizonyos, eléggé elvont előírások kellenek, melyek a *sakktáblára és a sakkfigurák lépésmódjára* vonatkoznak, éppen úgy, ahogy fenti játékunkban a *N, A, a* számokra és a velük történő műveletekre (a kivonásra) tettünk kikötéseket. Ezek a szabályok ugyanazok a kezdő **B** -re (fehér sakkfigurákkal játszik) és az **S** másodhúzóra (fekete figurákkal játszik).

1. A végjáték a játék legfontosabb része, így van ez a sakkban is.

2. A játék lényegét a végétől visszafelé haladva kell megértenünk. A sakkban alapvető szerepük van a matt-adási eljárásoknak (például királlyal és vezérrel a másik színű királlyal szemben, stb.). Általában *a matt-képek és a végjátékban ismert nyerőállások*, meghatározzák a korábbi stratégiákat.

3. A sakkban a játék kezdetétől induló nyerőstratégia, ha ilyen van egyáltalán, nem ismert, és nem is reményteljes erre törekedni. Ugyanez igaz a döntetlen-stratégiákra. Ez jelenti éppen a sakkjáték csodáját, szépségét, művészetét, tudományát, és még sok mindent, *amiért érdemes sakkozni*.

4. De a 6-figurás végjátékokat már számítógéppel megoldották (ez a legutóbbi információm; *az egyik kedves bíráló hívta fel a figyelmemet, hogy – a Wikipedia szerint – 2018 augusztusától már a 7 bábos végjátékok esetét is tisztázták*). Ez azt jelenti, hogy bármely 6 (7) bábos végjáték-állást teszünk fel a táblára, a számítógép eldönti, vajon a kezdő nyer, veszít, vagy a játszma döntetlenül végződik. Természetesen feltesszük, hogy mindketten a legjobban játszanak, vagyis két tökéletes számítógép-program „küzd" egymás ellen.

4. Az axiomatikus módszer, mint játék, történeti megjegyzések

A modern matematika bizonyos részeit, melyeket *már „elég jól axiomatizáltak"*, *individuális játékoknak* is tekinthetjük. A matematikus, mint játékos az emberiséget is képviseli. Az *alapfogalmakat,* mint a számok, geometriai alakzatok (pontok, egyenesek, síkok, vagy a tér maga), a rájuk vonatkozó *kapcsolatokkal, műveletekkel, logikai, gondolkodási szabályokkal együtt* úgy tekinthetjük, mint *játékszabályokat*. Ezek az emberiség kiemelkedő személyiségeinek, tudósoknak tapasztalatain, felismerésein, egyezményein alapulnak. Ezeket a játékszabályokat gyűjtik össze az *axiómákban*, melyek a matematika bizonyos „szűk" területeire vonatkoznak, de a fizikára és más tudományokra, sőt még a társadalom-tudományokra is „tettek már kísérletet".

Egy *matematikai eredmény* a bizonyításával együtt úgy is tekinthető, *mint egy játékszabályokon alapuló eljárás terméke*. A lépések hasonlók azokhoz melyeket eddig érzékeltettünk. A *végjáték elemzésével kezdjük visszafelé haladva, hogy nyerőstratégiát találjunk*, ha ilyen egyáltalán létezik. *Már tudjuk, hogy ilyen stratégia általában nem létezik*. *David Hilbert, Kurt Gödel*, a magyar *Neumann János*, csak példaként említve, tevékenysége kapcsolódik témánkhoz. Az emberi történelem, kultúra, tudomány és művészet alátámasztja sokunk megállapítását:

„Az élet – játék!".

A kiindulási játékunktól most már messzire jutottunk. Sakkozni édesanyámtól tanultam először, majd apámtól, és ma is sakkozom. Apám*, Molnár Ernő* (1912-1994) tanított meg arra a játékra, melyet ebben az előadásban elemeztem, éppen sakkfigurák segítségével. Akkoriban éppen ennek a játéknak a problémáját oldotta meg, melyet *A Matematika Tanítása* című folyóiratban tűztek ki tanárok számára. A Bolyai János Matematikai Társulat és a Magyar Oktatási (és Kulturális) Minisztériumnak ez a folyóirata ma is létezik. Lelkes tanárok oldják meg a feladatokat képességeik és ismereteik gyarapítására és a saját gyönyörűségükre.

Itt is megköszönöm kedves kollégáimnak, *Molnár Sáska Gábornak és Lángi Zsoltnak* segítő javaslatait.

Ez a közlemény megjelent: először az Eszéki (Osijek) Josip Juraj Strossmayer Egyetem, azóta már hagyományossá váló, a *MATEMATIKA ÉS A GYERMEK* konferenciák monográfia sorozatában [4], angol és magyar nyelven, a szerző játékkal kísért rövid előadása nyomán, később pedig *A Matematika Tanításá*ban [5].

5. Kiegészítő megjegyzések a JOK 2019 nyitó előadásán

Az előadáson ismertetett számelméleti játékhoz hasonló (mégis nagyon más) jellegű a - nemzetközi irodalomban ismertebb -

NIM játék:

Két játékos felváltva vesz el golyókat K darab (az egyszerűsítés kedvéért mondjuk K = 3) kupacban elhelyezett k_1, k_2, …, k_K számú golyóból úgy, hogy a soron lévő egy, általa éppen akkor kiszemelt kupacból vesz el legalább 1 golyót, de legfeljebb az egész kiszemelt kupacot. Az nyer, aki az utolsó golyó(ka)t elveszi.

Ez a játék sokkal nehezebb, és a tanári rávezetés feladatai is sokkal jelentősebbek, mert meglepő módon a játék kulcsa a 2-es számrendszer alkalmazása a kupacokban lévő golyók k_1, k_2, …, k_K számának felírására. *Mert ugye, a nyerni akaró játokos* ***„párokat”*** *szeretne hagyni partnerének, úgyhogy az „ilyen helyzetet aztán újra és újra elérhesse”.*

Már régi az a gondolat, hogy ***a sakkjáték tanítása legyen általános iskolai tananyag***. *Polgár Judit* sakk-nagymester, ENSZ-diplomatánk kedvenc törekvése is ez. ***Én ezt aránytalannak érzem***, de a sakkról mindenképpen essen szó a matematika-órán, akár feladatok formájában is, például:

Végig tud-e „menni” egy huszár a 8×8 mezőből álló sakktáblán huszár-ugrásokkal úgy, hogy minden mezőn pontosan egyszer álljon meg? (Nem könnyű feladat!) Aztán úgy, hogy a kezdő mezőre érjen vissza!?

És *legyen az iskolában sakk-szakkör!* - ez nekem is szép élményem volt.

Az emberiség legfontosabb axiómarendszerei *a számokra és a geometriára vonatkoznak*. Talán meglepő módon a geometria került először az érdeklődés középpontjába. Éppen a mi *Bolyai János*unk mutatta meg először (az orosz *Nyikolaj I. Lobacsevszkij* -jel közel egyidőben, tőle függetlenül, még nem befejezve), hogy *az euklideszi párhuzamossági axióma nem bizonyítható be a többi un. maradék axiómák segítségével.* Elképzelhető tehát olyan geometriai rendszer (ezt a *hiperbolikus geometriát* fel is építette), melyben egy adott *A* ponton át egy rá nem illeszkedő *a* egyeneshez az (*A*, *a*) síkban *több a -t nem-metsző egyenes is húzható*. Az euklideszi geometriában *csak egy ilyen lehet*, ez az *euklideszi párhuzamossági axióma egyik átfogalmazása*. *Annak bizonyítása, hogy létezik egy ilyen nem-metsző, Eukleidész örök gyöngyszeme.*

A párhuzamossági axióma független a maradék axiómáktól! Olyan ez, mint amikor a sakkjáték, vagy más játékok kimenetele *döntetlen*.

A természetes számok egyidősek az emberiséggel. Mégis csak 1890 körül foglalta axiómarendszerbe (Mindössze *öt axióma!*) az olasz Giuseppe *Peano* a természetes számokra vonatkozó ismereteinket. *Létezik az egy (*1*), mint természetes szám.* (Ez máris vita-téma! Vannak, akik a 0-t tekintik a kezdő természetes számnak.) *Minden természetes számmal együtt a rákövetkezője is természetes szám*. …

Mennyi bölcsesség is van ezek mögött. Például, értelmetlen egybefoglalni (és megszámolni, mert hát ez a rákövetkezés művelete!) *egymáshoz nem kötődő* dolgokat.

A teljes indukció axiómája meg felér egy filozófiai tanulmánnyal!

Az a tétel és bizonyítása, hogy *végtelen sok prímszám van*, *Eukleidész másik örök gyöngyszeme*. De hogy a 2 különbségű, un. *ikerprímek száma is végtelen-e*, máig nyitott (reménytelennek tűnő) kérdés. És hát a számelméletben még mennyi nehéz nyitott probléma van!

6. Egy emlék: Pólya György tanórája

A matematikai feladat-megoldás tanításának módszertani kérdéseire máig iránymutatók a magyar Pólya György (1887-1985) tevékenysége és könyvei: *A gondolkodás iskolája, A problémamegoldás iskolája*. Nagy szerencsémnek tartom, hogy részese lehettem annak a 45-perces tanórának, melyet a hazalátogató (akkor 81 éves) Pólya György professzor tartott a Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium „specmatos” tanulóinak (az akkor érettségiző diákok közül *Babai Lászlóra, Csörgő Piroskára, Pintz Jánosra, Szűcs Andrásra* emlékszem, ahogy utólag kinyomoztam, az esemény 1968 tavaszán volt).

A téma – *Szélsőérték feladatok*. A professzor felelevenítette, hogy a (rögzített) körbe írt háromszögek közül a szabályos háromszög a legnagyobb kerületű és területű. Hiszen ha a háromszögnek van két nem egyenlő szomszédos oldala, akkor területe (és kerülete is) növelhető a közös csúcspont körön történő elmozgatásával. (A finomságokat most nem részletezem, az órán sem történt meg). Ez a gondolatmenet lényegében változatlanul elmondható a többi körbeírt *n*-szögre (*n* > 3 adott természetes szám).

De fontoljuk meg, mi történik, ha kör helyett *egy adott (R sugarú) gömböt tekintünk a térben, s a gömbön adott n ≥ 4 számú pontot helyezünk el? Vizsgáljuk a pontok által meghatározott konvex test térfogatát.* ***Milyen pont-elhelyezés mellett lesz ez a térfogat a legnagyobb?*** A professzor érzékeltette, hogy jóval nehezebb problémával állunk szemben. A szabályos tetraéder *n* = 4 esete még viszonylag könnyű. Az *n* = 5 eset már „érdekesebb". Az *n* = 6 eset a szabályos oktaéderhez vezet (*n* = 7 megint nagyon nehéz).

Vizsgáljuk meg az *n* = 8 esetet. A gömbbe írt kocka térfogata a legnagyobb? Esélyesnek tűnik, a szabályosság eddig is nagy „előny" volt. Fontoljuk meg!

De nézzük csak azt a kettős gúlát, melynek hat csúcsa a földgömbi egyenlítő fő-körön alkot szabályos hatszöget, kettő pedig az „északi és déli pólusban" van. Elárulom, hogy ennek térfogata nagyobb lesz, mint a kockáé. Legyen a számítás házi feladat.

Kicsengettek, az óra véget ért.

Szinte máig azt gondoltam, hogy ez a kettős gúla a legnagyobb térfogatú (térfogata $R^3 \cdot \sqrt{3}$, $\sqrt{3} \approx 1,73\ldots$¿, szép szabályos is, a professzor is mintha ezt sugallta volna.

De nem így van! G. Horváth Ákos kollégám tartott a témáról szemináriumi előadást (3-4 éve), s kiderült, hogy a legnagyobb térfogatú test - nem ez a kettős gúla, és a testet nem is könnyű leírni (térfogata ≈ $R^3 \cdot 1,8157\ldots$). Ő is csak ekkoriban tudta meg, hogy az [1] dolgozatban már közölték az eredményt (lásd még a [2] átfogó ismertető cikket, továbbá *Lángi Zsolttal* közös magasabb dimenziós [3] dolgozatukat).

Tehát Pólya György nem tudhatott akkoriban erről az eredményről. De bizonyára foglalkoztatta a téma, és lehet, hogy tehetséges tanítványainak egy élő, megoldatlan problémát akart adni emlékül.

Irodalomjegyzék

[1] Joel D. Berman & Kit Hanes, Volumes of Polyhedra Inscribed in the Unit Sphere in $\mathbf{E}^3$. *Math. Annalen* **188**, 78-84 (1970)

[2] Ákos G. Horváth, Volume of Convex Hull of Two Bodies and Related Problems. M. Conder et al. (eds), *Discrete Geometry and Symmetry, Dedicated to Károly Bezdek and Egon Schulte on the Occasion of Their 60th Birthdays*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **234** (2018), 201-224.

[3] Ákos G. Horváth & Zsolt Lángi, Maximum volume polytopes inscribed in the unit sphere. *Monatsh Math* **181** (2016), 341-354. DOI 10.1007/s0605-016-0949-2

[4] Molnár Emil, Számelméleti játék sakkfigurákkal. *2. Nemzetközi Tudományos Kollokvium MATEMATIKA ÉS A GYERMEK* 2009. április 24. Eszék / Horvátország, pp. 173-176. ELEMENT, Zagreb, 2009.
Angol nyelven: Emil Molnár, A numbertheoretical game with chess figures. *2nd International Scientific Colloquium MATHEMATICS AND CHILDREN* 24 April 2009, Osijek / Croatia, pp. 83-86, ELEMENT, Zagreb, 2009, **ISBN** 978-953-197-568-**1**.

[5] Molnár Emil, Számelméleti játék sakkfigurákkal. *A Matematika Tanítása* **17/4** (2009), 21-23, Mozaik Kiadó.