VEKTORHOSSZ, LINEÁRISAN

1979 február

$\sqrt{(x^2+y^2)}$-et akarjuk $a|x|+b|y|$ alakban közelíteni.

Feltesszük, hogy $x \geq y \geq 0$. (Vagyis x és y máris nem-negatív, és úgy vannak elnevezve, hogy x nem kisebb y-nál.)

Állítások

(A)

$$0.955x + 0.414y$$

5 %-nál kisebb hibával közelít, x százalékában kifejezve.

(B)

$$0.96x + 0.4y$$

4 %-nál nem nagyobb hibával közelít, az eredmény százalékában kifejezve.

(C)

Négyes esetszétválasztással a hiba 1/2 % alá szorítható (mindkét értelemben) a következőképpen:

$$\begin{aligned}
&0.996x + 0.123y, && \text{ha} \quad y < 1/4x;\\
&0.940x + 0.350y, && \text{ha} \quad 1/4x \leq y < 1/2x;\\
&0.852x + 0.528y, && \text{ha} \quad 1/2x \leq y < 3/4x;\\
&0.756x + 0.657y, && \text{ha} \quad 3/4x \leq y.
\end{aligned}$$

Technikai megjegyzések:

(a) Egész-aritmetikában kellő pontosságot ad, ha az együtthatók kerekített 256-szorosát használjuk, az eredményt pedig kerekítve osztjuk 256-tal (8 jobbratolás, és az utolsó kicsúszó bitet hozzáadni - az utóbbit az "add carry" meg szokta csinálni).

(b) Az esetszétválasztásban az esetek a jó számítógépes kezelhetőség szempontjából vannak megválasztva. Más esethatárokkal a hiba leszorítható 1/4 %-ra. (És természetesen még erősebb tagolással tetszőlegesen leszorítható.)

Képletek

(amelyekből a fenti - és egyéb - közelítések levezethetők)

Jelölések: $q := \sqrt{(1+x^2)}$, $p := a + bx$, $d := p - q$.

d minimum-helye: $b/\sqrt{(1-b^2)}$; d értéke itt: $a - \sqrt{(1-b^2)}$.

d gyökhelyei (a "hibátlansági helyek"): $(ab \pm \sqrt{(a^2+b^2-1)})/(1-b^2)$.

p-t az $[u,v]$ intervallumon abszolúte jónak mondjuk, ha $d(u) = -d(b/\sqrt{(1-b^2)}) = d(v)$; relatíve jónak, ha ugyanez a megfelelő helyeken vett q-értékekkel leosztott értékekre teljesül. (Vigyázat: a minimum-***hely*** maga is függ p megválasztásától, amelynek definíciójában szerepel. Az sem eleve világos, hogy ez a hely egyáltalán az intervallumba esik - de ez a geometriai szemlélet alapján hihető, és a $\sqrt{(1+x^2)}$ görbe konvexitásából bizonyítható.) - Maximális a hiba a definíciós pontokban.

$\sqrt{(x^2+y^2)}$-et írjuk így: $x\sqrt{(1+(y/x)^2)}$. Ha mármost y/x értéke a p-ket definiáló intervallumban mozog, akkor látható, hogy abszolút p esetén p hibája az ax+by x szerinti relatív hibáját limitálja, relatív p esetén pedig az eredmény szerinti hibát. (Felhasználtuk, hogy $\sqrt{(1+x^2)} \geq 1$.)

Számok

(a megadott közelítések igazolására)

(A) Absz. p $[0,1]$-ben.

Követelmény: $1 - a = a - \sqrt{(1-b^2)} = \sqrt{2} - a - b$.

Ebből:

$a = 1/2*(1 + \sqrt{2}*\sqrt{(\sqrt{2}-1)}) = 0.9550898...$,
$b = \sqrt{2} - 1 = 0.4142135...$

Belső legrosszabb pont: $1/\sqrt{2}*\sqrt{(\sqrt{2}-1)} = 0.4550898...$ ($\approx 24.47°$).

Hibátlansági pontok: 0.1281727... ($\approx 7.30°$),
0.8269165... ($\approx 39.59°$).

Max. hiba (leolvasható pl. a balszélső pontban): 0.0449...

(B) Rel. p $[0,1]$-ben.

Követelmény: $1 - a = a\sqrt{(1-b^2)} - (1-b^2) = 1 - (a+b)/\sqrt{2}$.

Ebből:

$$(20-14\sqrt{2})a^4 + (6-4\sqrt{2})a^3 - (12-8\sqrt{2})a^2 - 4a + 4 = 0,$$
$$b = (\sqrt{2}-1)a,$$

vagyis

$a = 0.9605018...,$
$b = 0.3978528...$

Belső legrosszabb pont: 0.4336510... (≈ 23.44°).

Hibátlansági pontok: 0.1161869... (≈ 6.63°),
0.7918142... (≈ 38.37°).

Max. hiba ≤ 3.950 %.

(C) A négyszakaszosra nem adom meg a részletes számítást. Tudni érdemes, hogy (ebben a felosztásban) a bal szakasz a legrosszabb (max 0.4 % hiba), onnan jobbra egyre javul (0.12 %-ig). Nyolc hibátlan pont van.

Egyéb

(a) A (C) algoritmus átlagos futási ideje TPA 70-en: kb. 60 microsec szavas változók, kb. 40 microsec bájtos változók esetén. Az (A) és (B) futási ideje kb. 12 microsec-kel rövidebb (mindkét esetben).

(b) x, y, z-re is megy hasonló.