A szentpétervári paradoxonhoz
(triviális tények + tétova találgatások)

Nicolaus Bernoulli vetette fel a kérdést: Pál addig dobál egy pénzérmét, amíg fej nem lesz, Péter pedig 2^n dukátot ad neki, ha n-edikre dob először fejet — mennyit fizessen Péternek Pál az ilyen játék jogáért?*

A nyeremény várható értéke végtelen. Viszont 1 valószínűséggel csak véges összeget lehet nyerni (és a 0 valószínűségű végtelen nyeremény megszerzése sem boldogító, hiszen végtelen ideig kell rá várni) — ilyen esélyekért nyilván nem érdemes végtelen pénzt fizetni.

Nicolaus Bernoulli szerint „még a féleszű ember is örömmel adná el a játékhoz való jogát negyven dukátért” (Csörgő Sándor fordítását idézem).

Egy korlátlan pénzt igénylő végtelen játék esetében persze lehetne úgy érvelni, hogy akiknek korlátlan a pénzük, azoknak, akármennyiért játszanak, sem több, sem kevesebb pénzük nem lesz ettől, tehát bármiféle érték méltányos.**

Ám ezzel nincs elintézve a „negyven dukát” — ugyanis végesíthetjük a játékot.

S_n-játék: Pál n menetre fizet be; szabály: ha a k-adik dobásra dob először fejet, kap 2^k dukátot (és a többi dobás érdektelen, elmaradhat), ha végig sem dob fejet, nem kap semmit. — Az eredeti, teljes játékot nevezhetjük S_∞-nek.

S_n minden n-re kedvezőtlenebb Pál szempontjából S_∞-nél.

S_n várható értéke n. Elkezdi-e Pál valamilyen n-nél sokallani, hogy a várható értéket fizesse a játékért? $n = 1$-nél nyilván még nem, lévén a játék szimmetrikus; Nicolaus Bernoulli intuíciója szerint legkésőbb $n = 40$-nél már igen.

Lehet-e valamilyen értelmes „méltányos értéket”, „fogadási értéket” definiálni, amely S_n-re n növekedésével korlátos marad, vagy akár csak lassabban nő n-nél?

Ha van is ilyen, nem lehet additív:

S_n méltányos értékét jelöljük σ_n-nel; $\sigma_1 = 1$ (a szimmetria miatt).

Ha additív, akkor speciálisan $\sigma_{n+1} = \sigma_n + \sigma_1 = \sigma_n + 1$, amiből is $\sigma_n = n$, ez pedig a várható érték.

(Az sem segít sokat, ha elejtjük a szimmetriakövetelményt és az $\sigma_1 = 1$ feltevést; akármilyen $\sigma_1 > 0$-ra σ_n lineárisan növekszik: $\sigma_n = \sigma_1 n$.)

---

* Ez az a Nicolaus volt a sok közül, aki 1687-ben született. A problémát 1713-ban, egy Pierre Raymond de Montmort-nak írt levelében vetette fel, majd 1738-ban unokatestvére, Daniel Bernoulli tárgyalta a *Комментарии Санкт-Петербургской Академии*-ban (ezért „szentpétervári”).

** Variációk a korlátlan játékra:

Pál fej-vagy-írást játszik Péterrel; Pál szabja meg a tétet.

Pál stratégiája: elsőre legalább egy pénzt tesz fel; ha veszt, legalább duplázza a tétet, ha nyer, abbahagyja és besöpri a nyereséget.

Így 1 valószínűséggel (előbb-utóbb) legalább annyi nyereséggel áll fel, amennyi a kezdőtétje volt. Újra meg újra leülhet játszani, tehát tetszőlegesen nagy lesz a nyeresége. Mivel teljesen mindegy, hogy felállt-e közben, egyhuzamban annyit nyer, amennyit akar. Ha Péter a bank jutalékául százalékot von le, akkor is.

Még egy csavar: Pál és Péter egyenlő feltételekkel játszik; a szabály: a tét az indíványozott összegek közül a nem-kisebbik. Így mind a ketten korlátlanul nyernek. Sajnos nem egyidejűleg.

Ugyancsak antiintuitív — és nem tréfa: Mindig egy pénzben játszanak. Tudjuk (Pólya tétele), hogy 1 valószínűséggel lesznek még egálban, tehát egymásután akárhányszor is. Kérdés: várhatólag hány dobás, amíg ez először bekövetkezik. Válasz: végtelen sok.

Úgy látszik, a valószínűségszámításban megalkotott fogalmaink önálló életet élnek és olyan magatartásokat tanúsítanak, amelyekre megalkotásukkor (és elnevezésükkor) nem számítottunk.

Nem lehet „elvárni, hogy a valóság feleljen meg a névnek” (kínai mondás).

Kelleni fog: $\theta_n := \sigma_n - \sigma_{n-1}$ (σ_0-t vegyük 0-nak), azaz: mennyivel többet adjon Pál azért, hogy S_{n-1} helyett S_n-t játszhassék.

Az S_n-ek feldarabolhatók —

T_n-játék: Pál n-szer dob; ha az első $n-1$ dobás írás, az n-edik pedig fej, akkor kap 2^n dukátot, különben nem kap semmit. T_n várható értéke minden n-re 1.

S_n ekvivalens azzal, hogy Pál egyszerre játszik T_k-kat $k = 1, \ldots, n$-re.

T_n méltányos értékét jelöljük τ_n-nel; $\tau_1 = \sigma_1$.

Additivitás esetén $\sigma_n = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n$; ebből és a fenti egyenlőségből minden n-re $\tau_n = \tau_1 = 1$, vagyis a várható érték; egyben $\tau_n = \theta_n$.

Így hát engednünk kell az additivitásból.

Ha megtartunk az additivitásból annyit, hogy az egyszerre játszott játékok méltányos értéke megegyezik a külön-külön játszott játékokéval (és ennélfogva a $\sigma_n = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n$ egyenlőség fennáll), akkor igaz marad $\tau_n = \theta_n$ és a probléma redukálódik a T_n-játékokra.

Ha ezt is elvetjük, de feltesszük a szubadditivitást: $\sigma_n \leq \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n$ és $\sigma_{n+m} \leq \sigma_n + \sigma_m$, ebből az előbbihez hasonló, de határozatlanabb kép adódik; τ_n most már nem okvetlenül egyezik meg θ_n-nel.

Ha a játékösszegekre semmiféle kikötést nem teszünk, kevés fogódzó marad. Annyit mindenképp feltehetünk, hogy σ_n monoton növekvő, és hogy mind θ_n, mind τ_n monoton nem-növekvő.

$\sigma_n < n$-hez az kell, hogy θ_n az n növekedésével előbb-utóbb csökkenjen, korlátos σ_n-hez pedig az, hogy a θ_n-ek összege konvergáljon.

Én hajlom arra, hogy mind a T_n-ek, mind az S_n-ek méltányos értéke igenis megegyezik a várható értékükkel (és, a fortiori, Nicolaus Bernoulli intuíciója hibás).

Mindenesetre: ha a méltányos érték *nem* a várható érték, akkor már véges — és nagyon egyszerű — esetekben is eltérnek egymástól. Ez megkönnyítheti a diszkussziót: nem szükséges (és nem elegendő) hozzá a teljes S_∞-probléma kezelése (viszont hozzájárulhat az S_∞-probléma vizsgálatához).

A fenti konstrukciók bármiféle értelmes — legalábbis monoton — értékfogalom mellett alsó becslést adnak. Egy korlátos méltányos értéknek vagy valami hasonlónak (a várható értéknél eshetőlegesen kisebb értéknek) a definiálhatóságához azonban jó lenne olyan játékokat találni, amelyeket felső becslésre lehet használni. Ehelyett talán az is megteszi, ha vannak valamilyen lim vagy lim sup becslések.

Úgy tűnik, ilyen becsléseket csak akkor tudunk találni, ha mondani tudunk valamit a méltányos érték „elvárt tulajdonságairól”. Eleve kiköthető lehet, hogy monoton növekedjék mind a nyeremény növekedésével, mind a kockázat csökkenésével. Ennyi azonban a várható értékre is igaz, ennélfogva ez nem elegendő a különbségtételhez. Valami olyan reláció kellene, amelynek következtében a kockázat növekedése „erősebben” hat, mint a nyeremény növekedése.*

---

* Példafüggvény: $\theta_n \leq n^{-1.0253672^+}$esetén $\sigma_n \leq \zeta(1.0253672^+)$ és a 40 dukát stimmel. Ha kis n-re lassabb a csökkenés, akkor nagy n-re gyorsabb kell. Ilyet lehet kapni pl. exponenciálissal: $\theta_n \leq 0.975^{n-1}$ szintén eleget tesz a 40 dukátnak; még ilyenebb az emeletes exponenciális: mondjuk $\theta_n \leq b^{b^{1-n}-1}$, ahol $b = 0.9405828^-$; stb. — Akárhogy oszlik is el az összeg a tagokra, nagyon rohamos az enyészés a várható értékhez $(=1)$ képest.

Kézenfekvő lehetőség a függvény konkrét alakját valamiféle további paraméterekhez kötni.

Például lehet a játék „időtartamát” tekinteni értékcsökkentő hatásúnak.* Vagy lehet a kockázatot a játékos összvagyonától is függőnek tekinteni.**

Ilyen parametrizálások nyilván értelmesek lehetnek, és szerepet kaphatnak pl. a játékosi döntések modellálásában.*** Az a gond velük (azonfelül, hogy tulajdonképpen már más dologról beszélünk), hogy túl nagy a kötetlenség: sokféle alak lehetséges, és nem látszanak kényszerítő erejű érvek, amelyek alapján választani lehetne közülük.

* Milyen mérce szerint? És: egyforma-e a mérce a partnerek számára?

** Ilyen volt már a legkorábbi javaslat is, Daniel Bernoullié az említett írásában: ő a kockázatot a vagyonnal fordítottan arányosnak vette; ebből logaritmikus függvény adódik.

*** A „negyven dukát” valójában döntésként van megfogalmazva. Ha így tekintjük, nincs paradoxon: egy döntés lehet okos vagy oktalan, de nem paradox. — A döntési stratégiák sokfélék lehetnek, egyértelmű konzisztecia-kritériumok sincsenek. Pl. egy „nagy” nyereség kilátása vagy egy „kis” tét kockáztatása fel-, ill. leértékelhető. Ezek realisztikus körülményeket is modellálhatnak (különben nem lenne működőképes profitostul-adóztatásostul a szerencsejáték).