Lang-együtthatós Dirichlet-sor

$$N_0(k) := \begin{cases} 1, \text{ ha } k = 1, \\ p_1 \cdots p_r, \text{ ha } k = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}. \end{cases}$$

$N_0(k)$ a k „négyzetmentes része", S. Lang szavával: „radikálja".

$$N(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_0(k)}{k^s}, \quad \sigma > 2.$$

$$N(s) = \prod_p \left(1 + \frac{p}{p^s} + \frac{p}{p^{2s}} + \frac{p}{p^{3s}} + \dots\right) = \prod_p \left(1 + \frac{p}{p^s}\left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots\right)\right)$$
$$= \prod_p \left(1 + \frac{p}{p^s - 1}\right), \quad \sigma > 2.$$

Folytatás a kritikus sávba

$$M(s) := \frac{N(s)}{\zeta(s-1)}.$$

$$M(s) = \prod_p \left(1 - \frac{p(p-1)}{p^s(p^s-1)}\right).$$

$\sigma \geq 1$-re $\left|\frac{p(p-1)}{p^s(p^s-1)}\right| \leq \frac{p(p-1)}{p^\sigma(p^\sigma-1)} \leq \frac{p^2}{p^{2\sigma}} = \frac{1}{p^{2(\sigma-1)}}$, úgyhogy $\sigma > \frac{3}{2}$-re a szorzat konvergens.

Ezért $s = 2$-re $N(s)$-nek egyszeres pólusa van; $\lim_{s \to 2} (s-2) N(s) =$
$= \lim_{s \to 2} \frac{N(s)}{\zeta(s-1)} = M(2) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p(p+1)}\right) \approx \overset{0.7044}{\cancel{0.744}}.$

$\sigma > \frac{3}{2}$-re $N(s)$ e pólus kivételével reguláris, és a gyökei megegyeznek $\zeta(s-1)$ gyökeivel (ha ugyan vannak).

Tovább:

$$L(s) := M(s)\,\zeta(2(s-1)).$$

$$L(s) = \prod_p \left(1 + \frac{p}{(p^s-1)(p^s+p)}\right).$$

$\frac{2}{2^{\sigma-1}-1}$; $\frac{1}{p^\sigma}$

$\sigma > 1$-re $\left|\frac{p}{(p^s-1)(p^s+p)}\right| \leq \frac{1}{(p^\sigma-1)(p^{\sigma-1}-1)} \leq \frac{4}{p^{2\sigma-1}}$, úgyhogy $\sigma > 1$-re a szorzat konvergens.

Ezért $s = \frac{3}{2}$-re $N(s)$-nek egyszeres gyöke van. $\sigma = \frac{3}{2}$-en $N(s)$ reguláris, és a többi gyöke megegyezik $\zeta(s-1)$ gyökeivel.

$\sigma > 1$-re $N(s)$ folytatható, de már vannak pólusai: $\sigma = \frac{5}{4}$-en mindenesetre végtelen sok pólusa van. (A kritikus egyenesen Riemann nélkül is elsöprően több a gyök, mint bármely más egyenesen; v.ö. pl. Titchmarsh.)

Kelleni fog, hogy $\sigma \searrow 1$-re $L(\sigma) \to \infty$. Ez látható abból, hogy

$$\frac{p}{(p^\sigma \overset{+}{\cancel{-}} 1)(p^\sigma + p)} \geq \frac{\cancel{1}\ 4}{\cancel{4}\ 9\, p^{2\sigma-1}}.$$

Tovább nincs:

$$K(s) := \frac{L(s)}{\zeta(s)}.$$

$$K(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s + p}\right).$$

$$K_p := 1 - \frac{1}{p^{\sigma+it} + p}.$$

$$|K_p|^2 = \frac{(p^\sigma - p + 1)^2 + 4p^\sigma (p-1)\cos^2 \frac{t \log p}{2}}{(p^\sigma - p)^2 + 4p^{\sigma+1} \cos^2 \frac{t\log p}{2}}$$
$$= 1 - \frac{1}{p} + \frac{(2 + p^{\sigma-1} - 1)(p^\sigma - p) + 1}{(p^\sigma - p)^2 + 4p^{\sigma+1}\cos^2 \frac{t \log p}{2}}.$$

Minden p-re $|K_p| \geq 1 - \frac{1}{p^\sigma + p}$.

Ha $t = \frac{(2k+1)\pi}{\log q}$, akkor $|K_q| = 1 + \frac{1}{q^\sigma - q}$.

Így $|K(\sigma)| \geq \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^\sigma + p}\right) = K(\sigma)$; $t = \frac{(2k+1)\pi}{\log q}$-val pedig

$$|K(s)| \geq K(\sigma) \frac{1 + \frac{1}{q^\sigma - q}}{1 - \frac{1}{q^\sigma + q}} \geq K(\sigma) \frac{1}{q^\sigma - q} = \frac{K(\sigma)\zeta(\sigma)}{(q^\sigma - q)\zeta(\sigma)} = \frac{L(\sigma)}{(q^\sigma - q)\zeta(\sigma)}.$$

$\sigma \searrow 1$-re $L(\sigma) \to \infty$; $(q^\sigma - q)\zeta(\sigma)$ véges határértékhez tart ($q \log q$-hoz); ezért $|K(s)|$ és vele $|N(s)| \to \infty$.

Az ilyen t-k mindenütt sűrűn vannak, tehát $\sigma = 1$ természetes határ.

(Mellesleg: $s \searrow 1$-re $K(s) \to 0$, de $N(s) \to \infty$ ott is.)

Szép, de haszontalan: $N(s) = \zeta(s) P(s)$, $P(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\mu(k)|\varphi(k)}{k^s}$, $\sigma > 2$. (Tudjuk, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\mu(k)|}{k^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$ és $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$. De semmit sem tudok Dirichlet-sorok tagonkénti szorzatáról.)

Némi aritmetika

φ: Euler, μ: Möbius, λ: Pólya.

$$N_0(k) = \sum_{d|k} |\mu(d)|\varphi(d).$$

(Lásd be prímhatványra, és lásd be, hogy multiplikatív.)

Ha k nem négyzetmentes, vagyis ha $N_0(k) \neq k$, akkor

$$N_0(k) = -\sum_{\substack{d|k \\ d<k}} \mu\left(\frac{k}{d}\right) N_0(d).$$

(Adódik az előző képlet megfordításából.)

A továbbiakhoz (mind trivi):

$d|k \Rightarrow N_0(d) \mid N_0(k)$.

$N_0(k)^h | k \iff k$ minden prímtényezője legalább h-adik hatványon van.

$\mu(N_0(k)) = \lambda(N_0(k))$.

$\varphi(N_0(k)^h) = \varphi(N_0(k))\, N_0(k)^{h-1}$.

$\varphi(N_0(k)) = \varphi(k)\frac{N_0(k)}{k}$. (És így ez egész, sőt.) Másképp: $\frac{N_0(k)}{\varphi(N_0(k))} = \frac{k}{\varphi(k)}$.

Használni fogjuk:

$$R_0(k) := \begin{cases} \mu(N_0(k)), & \text{ha } N_0(k)^2 \mid k, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

$$R(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_0(k)}{k^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s(p^s-1)}\right), \quad \sigma > \frac{1}{2}.$$

$M(s), L(s), K(s)$ sorainak együtthatóit jelölje $M_0(k), L_0(k), K_0(k)$.

A szorzat-alakokból adódik:

$$M_0(k) = \begin{cases} \mu(N_0(k))\,\varphi(N_0(k)^2), & \text{ha } N_0(k)^2 \mid k, \\ 0 & \text{különben}, \end{cases}$$

vagyis

$$M_0(k) = R_0(k)\,\frac{\varphi(k)}{k}\,N_0(k)^2.$$

$$L_0(k) = \begin{cases} 1, & \text{ha } k=1, \\ \dfrac{p_1+(-p_1)^{e_1}}{1+p_1}\cdots\dfrac{p_r+(-p_r)^{e_r}}{1+p_r}, & \text{ha } k = p_1^{e_1}\cdots p_r^{e_r}. \end{cases}$$

(Ez amolyan „alternáló osztóösszeg"-féle; nem ismerek hagyományos jelölést hozzá.)

$$K_0(k) = \lambda(k)\frac{k}{N_0(k)}.$$ (Vicces, hogy ilyen egyszerű, mégsem folytatható.)

Adódnak a kereszt-összefüggések. Például:

$$\frac{N_0(k)}{k} = \sum_{d\mid k}\frac{M_0(d)}{d},$$
$$= \sum_{d\mid k}\left|\mu\left(\tfrac{k}{d}\right)\right|\frac{L_0(d)}{d};$$

$$L_0(k) = \sum_{d\mid k} K_0(d)$$
$$= \sum_{d\mid k}\lambda(d)\,d\,\frac{1}{N_0(d)},$$
$$= \sum_{d\mid k}\lambda(d)\,d\,N_0\left(\tfrac{k}{d}\right).$$

(Vicces, hogy az utolsó kettő megegyezik.)