(1991. aug.–szept.)

KISISKOLA

Annak, aki élvezi a függvénydiszkussziót:

$$y = x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

Jó kérdések pl.:

(a) Mennyi $y(\frac{1}{4})$?

(b) Hol konvergál?

(c) Hova folytatható?

(d) Melyek a racionális pontjai?

(e) Mi az inverze?

És: hogyan érdemes számolni?

KISISKOLA 2

(A)

Híres eldöntetlen probléma a Fermat-sejtés:

x, y, z pozitív egész, n 2-nél nagyobb egész. Akkor $x^n + y^n = z^n$ lehetetlen.

(Az „enyhített" Fermat-sejtés megengedi, hogy legyen megoldás, de csak véges számú.)

Mi a baj, ha ugyan van baj, a következő két állítással?

(a) Van olyan (n-től függő) $K = K(n)$ küszöbszám, amellyel fennáll, hogy ha a Fermat-sejtés x, y, $z \leq K$-ra igaz, akkor tetszőleges x, y, z-re igaz.

(b) Ilyen küszöbszám n-től függetlenül (globálisan) is megadható, sőt maga n is korlátozható vele.

[Mit tudunk mondani (a)-ról és (b)-ről? Pl. igaz, hamis, eldöntetlen, eldönthetetlen, értelmetlen, triviális, semmitmondó, ellentmondó, ellenőrizhetetlen, elvben kiszámolható, de túl nagy számolásigényű, stb.?]

(B)

(M. Minsky) Mi a hiba az alábbi bizonyításban?

Állítás: Minden golyó egyforma színű. „Matematikusabb"módon megfogalmazva: Minden golyókból álló halmaz csupa egyforma golyóból áll.

Bizonyítás: Az egy golyóból álló halmaz triviálisan csupa egyforma golyóból áll. Feltehetjük, hogy az állítás igaz $n-1$ golyós halmazokra; ebből belátjuk, hogy n golyós halmazokra is igaz. Az n golyós halmaz golyóit válasszuk szét egy $n-1$ golyós és egy 1 golyós csoportra. Az indukciós feltevés szerint e csoportokra igaz az állítás. De még ki kell zárnunk azt az eshetőséget, hogy a csoportok különkülön egyforma golyókból állnak ugyan, de egymástól különböznek. Ezért a különálló golyót tegyük be az $n-1$-es csoportba és helyette vegyünk ki abból egy golyót különállónak; most erre a csoportosításra *újra* alkalmazzuk az indukciós feltevést (a berakott golyónak most már egyformának kell lennie az $n-1$-es csoportbeliekkel, a kiemelt golyó pedig eleve az volt). Kész.

(C)

Van-e baja az alábbi okfejtésnek?

(a) Időegységenként a következőt teszem: Egy (elég nagy) urnába berakok két golyót, kiveszek egyet, majd megint berakok kettőt, kiveszek egyet, és így tovább, a végtelenségig. Kérdés: Ha ezt minden határon túl csinálom, *hány* golyó lesz az urnában?

[Mondaná az ember, hogy végtelen sok. De aki kerüli ezt a szót, az legalábbis annyit kijelenthet, hogy az n-edik lépés után n golyó van az urnában, ez pedig minden határon túl nő. A végtelen időtől is meg lehet szabadulni a szokvány trükkel: egyre gyorsabban csinálom, 1/2, 1/4, 1/8 stb. perc alatt, és azt kérdezem, mi van egy perc után. Egyre kisebb golyókat is használhatok, hogy ne kelljen végtelen nagy urna.]

(b) Most *számozott* golyókkal dolgozom: 1, 2, 3, …, és így csinálom: Az első lépésben beteszem 1-et és 2-t, kiveszem 1-et, a második lépésben beteszem 3-at és 4-et, kiveszem 2-t, stb., az n-edikben beteszem $2n-1$-et és $2n$-t, kiveszem n-t. Kérdés: *Mely* golyók lesznek az urnában?

[Merthogy a berakottak közül egy sem: az n kikerül az urnából az n-edik lépésben és kint is marad. Hát akkor?]

KISISKOLA 3

(A)

Van három (csukott) doboz: kettő üres, egyben van valami jó dolog; én tudom, melyikben, te nem.

A játék a következő: Te kiválasztasz egy dobozt (de még nem nézel bele). Erre én kinyitok egy másikat – mégpedig üreset fogok kinyitni. Utána még meggondolhatod magad: változtatsz vagy megmaradsz az eredeti választásodnál.

Cserélsz vagy nem?

(B)

Van egy (ideális) bináris véletleszám-forrásunk. Fogadni lehet velem (ha a feltételek tetszenek nekem), hogy melyik bit-hármas jön előbb: az 111 vagy a 011.

Én a 011-re teszek; milyen fogadási arányt ajánlasz?

(C)

Ugyanezzel a véletlenszám-forrással játszani lehet a következőt: A választ egy bit-hármast, B választ (e hármas ismeretében) egy *másik* hármast.

Mi akarsz lenni, A vagy B? (Vagyis mi előnyösebb: elsőnek választani vagy tudni a másik választásáról – vagy pedig mindegy?)

(D)

(Lewis Carroll) A barátom hozott egy zacskót, benne négy fekete-vagy-fehér golyóval, és mondta, húzzak kettőt. Húztam; mindkettő fehér lett. Mondja erre: „Előre szólni akartam, hogy *van* benne fehér. De hát ezt most már úgyis tudod. Húzz még egyet."

Mi a valószínűsége annak, hogy harmadjára megint fehéret kapok?

(E)

Beszélgetés a pesti rakparti kishajó-végállomás előtt:

– Nem tudja, hol kell a tahisi hajóra szállni?
– Dehogynem: itt. Menetrendszerűen felváltva indulnak el a hajók Tahira és Vácra.
– Vácott semmi keresnivalóm. Honnan ismerem fel a tahi hajót?
– Azt én nem tudom, csak azt, hogy ha felszáll a következőre, háromszor akkora a valószínűsége, hogy véletlenül épp tahi hajóra száll, mint hogy vácira.
– Ha most felszállok?
– Akármikor.
– Köszönöm, akkor most már bizonyosan a tahi hajóra szállok fel.

Értelmezd ezt a beszélgetést (vagyis konstruálj egy tényállást, amelyben a beszélgetés értelmes és minden állítása igaz lehet).