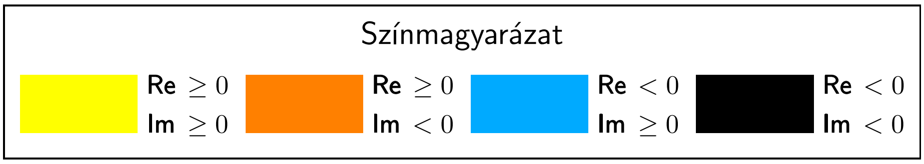
A hibaintegrál gyökeiről

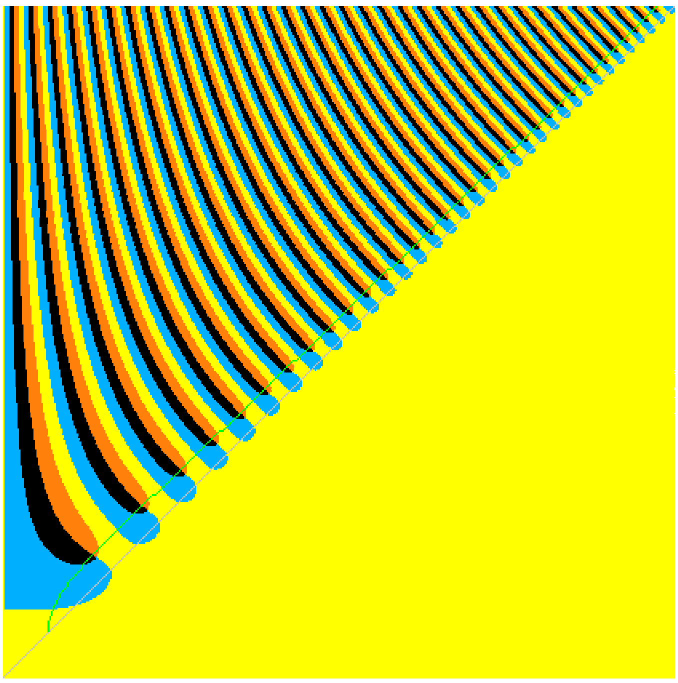
$$\boxed{E(z) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\rho^2} \mathrm{d}\rho}$$

Állítások: *$E(z)$-nek az R sugarú körben $\sim 2R^2/\pi$ gyöke van; a gyökök egyszeresek; a $z = 0$-beli gyök kivételével az* $\mathsf{Im} = \pm\mathsf{Re}$ *átlók mentén, tőlük a képzetes tengely felé helyezkednek el* (*egy-egy irányban a negyedük*); *az átlójuktól való távolságuk* $< \log R/R$. (Valamivel szorosabb becslés is igaz.)

A bizonyításokat nem epszilonozom ki, csak jelzem a lépéseket; a helyet inkább a látványra szánom.

A gyökök elhelyezkedéséről benyomást ad a következő kép. (A négy szín találkozásai a gyökhelyek.)





$E(z)$ az első síknegyedben, $x, y \in [\,0\,, 10.5\,]$;
a zöld görbe a gyökök távolságkorlátja

$E(z)$-be helyettesítsünk új integrációs változóként ρ/z-t, és ezt is jelöljük ρ-val:

$$E(z) = \frac{z}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-z^2\rho^2} \mathrm{d}\rho\,.$$

Bevezetve

$$\widehat{H}(z) := \int_0^1 e^{-z\rho^2}\mathrm{d}\rho = \int_0^1 e^{-x\rho^2}\Big(\cos\,(y\rho^2) - \mathbf{i}\sin\,(y\rho^2)\Big)\mathrm{d}\rho\text{-t},$$

$$E(z) = \frac{z}{\sqrt{\pi}}\widehat{H}(z^2).$$

$\widehat{H}(z)$ átviszi az átlókat a képzetes tengelybe; gyökei az $E(z)$ transzformált gyökei a $z = 0$-beli gyök kivételével.

A továbbiakban mindig a felső félsíkról beszélek (az alsó félsík komplex konjugált).

Belátjuk, hogy a valós tengely és az $\mathbf{i}y$ egyenes között $\sim y/2\pi$ gyök van, és hogy a gyökök az $x = -\log y$ (avagy $y = e^{-x}$) görbe és a képzetes tengely között vannak. (Ha ezek igazak, akkor igazak az $E(z)$-beli gyöksűrűségről és a gyökök átlóhoz tartásáról mondottak.)

Kényelmesebb $\widehat{H}(z)$ helyett $H(z) := \widehat{H}(-\overline{z})$-t használni (tükrözés a képzetes tengelyre):

$$H(z) = \int_0^1 e^{x\rho^2}\Big(\cos\,(y\rho^2) - \mathbf{i}\sin\,(y\rho^2)\Big)\mathrm{d}\rho;$$

— annyi változott, hogy most a képzetes tengely és az $x = \log y$ közötti mezőbe rekesztendők a gyökök.

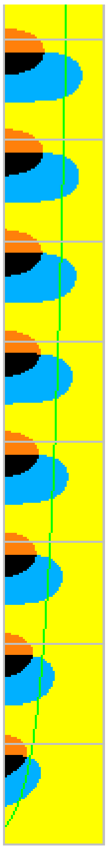
$H(z)$ az első negyedben; a rácsozat élhossza: 2π;
a zöld görbe a távolságkorlát

$x \leq 0$-ra $\mathsf{\textbf{Re}}\,H(x+\mathbf{i}y) > 0$, $\mathsf{\textbf{Im}}\,H(x+\mathbf{i}y) < 0$; ez $x = 0$-ra köztudott, $x < 0$-ra pedig a fortiori igaz. Ezért ott nem lehet gyök.

Legyen most

$$K(z) := H(z)e^{\mathbf{i}y} = \int_0^1 e^{x\rho^2}\Big(\cos\,(y(1-\rho^2)) + \mathbf{i}\sin\,(y(1-\rho^2))\Big)\mathrm{d}\rho\,.$$

A képzetes tengely mentén most $2\pi + O(1)$ hosszúságú szakaszokon egy-egy teljes színciklus van.[1] Igaz lesz: az első síknegyedbe átnyúló negatív képzetes részű betüremkedések az $x = \log y$-tól balra maradó és sávtartó bugyrok; így a nyúlványokon van (legalább) egy gyök; és (legfeljebb) egy van, mert gyökhely körül mindig ugyanolyan (sárga–piros–fekete–kék) a színciklus.[2]



$K(z)$ az első negyedben; a zöld görbe: $x = \log y$, vagyis $y = e^x$

Mindenekelőtt azt lássuk be, hogy az $x = \log y$ görbén nincsen gyök. Elég azt látni, hogy

$$J(x,y) := \mathsf{Im}\,K(x+iy)$$

ott pozitív.

$\rho \leftarrow 1-\rho^2$ helyettesítéssel

$$J = 1/2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho}}e^{x(1-\rho)}\sin(y\rho)\mathrm{d}\rho\,.$$

Bontsuk ketté: $1/2\int_0^{1-1/2x} + 1/2\int_{1-1/2x}^1$. A fejet bontsuk tovább $[\,k\pi/y\,,\,(k{+}1)\pi/y\,]$ szakaszokra, az utolsó szakasz esetleg rövidebb. Ezek pozitíven kezdődnek, alternáló előjelűek és abszolút értékben csökkennek. A farok hasonlóan, de ellenirányban becsülhető. A farok negatív is tud lenni. (Vigyázat a határokon, ha azok nem π/y egészszámú többszörösei.) Beírva $x = \log y$-t, a fej becslése elég nagy y-ra megbízhatóan majorálja a farokét. Hogy $J(\log y, y)$ odáig is minden $y > 0$-ra pozitív, azt explicit kiszámolással[3] lehet megmutatni. (Azt is megkaphatjuk, hogy ha y tart ∞-hez, akkor a farok tart 0-hoz és J tart 1/2-hez. Ez egyelőre nem kell.)

Továbbá: $\dfrac{\partial J}{\partial x} = 1/2\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-\rho}\,e^{x(1-\rho)}\sin(y\rho)\mathrm{d}\rho > 0$, ha $x \geq 0, y > 0$ — a $[\,k\pi/y\,,\,(k{+}1)\pi/y\,]$ szakaszok alternálnak és absz. csökkennek. Ennélfogva nincsen gyök az $x = \log y$ görbétől jobbra, a negatív képzetes részű tartományok bugyrok, mégpedig sávtartók.

Végül: $\dfrac{\partial K}{\partial x} = (x + \mathbf{i}y)\cdot\dfrac{e^x}{2\,(x^2+y^2)}\,,\quad \dfrac{\partial K}{\partial y} = (y - \mathbf{i}x)\cdot\dfrac{e^x}{2\,(x^2+y^2)}\,,$ ha $x + \mathbf{i}y$ gyökhely — integráljuk parciálisan K-t ($u' = 1/\sqrt{1-\rho}$), aztán helyettesítsünk be. Ezért a színciklus mindig ugyanaz.[4]

---

[1] A $H(\mathbf{i}y)$-ról már tudjuk, hogy monokróm; az $e^{\mathbf{i}y}$ szorzó ezt megvariálja; annyit kell látni, hogy korlátos eltolódáson belül 2π-nként egy és csak egy ilyen ciklus van.

[2] Egyszeres gyökhely körül egyszeres teljes színciklus van: egy $\mathsf{Re} = 0$ és egy $\mathsf{Im} = 0$ görbe keresztezi egymást. Ha ezt több helyen tennék, szomszédos metszéspontokban ellentett lenne a színciklus. (Eleve tudható, hogy nincs többszörös gyök, lévén $E'(z)$ gyökmentes — de ez az alábbiakból is kiderül.)

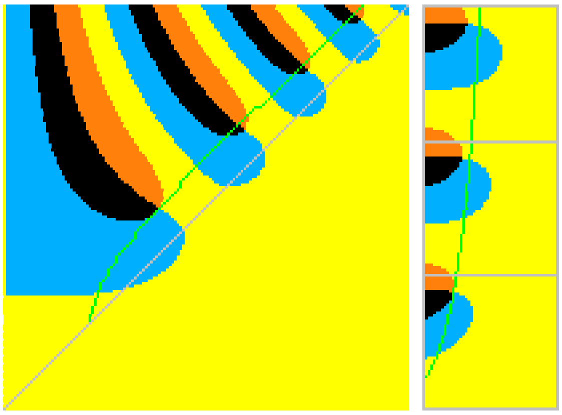
[3] Numerikus számoláshoz jobb a $\rho \leftarrow 1-\rho^2$ helyettesítés *előtti*, nem-improprius integrál-alak. Mellesleg $y > e$-re $J(\log y, y) = 1/2{+}R(y)$, ahol $|R(y)| < (1{-}1/\log y)^{-1/2} - 1$; J így $y \geq 2\pi$-re már mindenképpen pozitív; $y \in (\,0,\pi\,]$-re pozitív az integrandus; vizsgálni csak $y \in (\pi\,,2\pi)$-re kell. — Ínyencség: $J(x,y)$ az $(ye^x{-}x\sin y{-}y\cos y)/2(x^2{+}y^2)$ x szerinti „1/2-edik integrálja".

[4] Ráadásul fix orientációjú: keletre sárga, északra piros, nyugatra fekete, délre kék.

Az $x = \log y$ korlátgörbe javítható: az $x = \log(cy) = \log y + \log c$ görbén $J \to c/2$ (most már kell a J pontos becslése) — így aszimptotikusan (de nem okvetlenül elejétől kezdve) minden $c > 0$ jó. (A legkisebb absz. értékű gyökök lógnak ki a legjobban.)

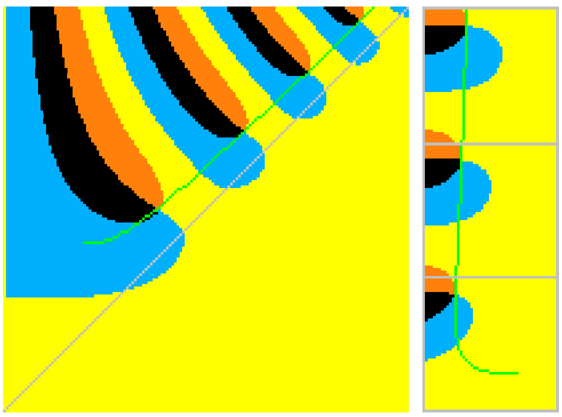
Explicit számolás azt mutatja, hogy $c \coloneqq 0.76855011^{-}$ választással a görbe még bekeríti a gyököket (mindet).

Ha $K(z)$ valamely gyöke az $x = \log(cy)$ görbétől balra van, akkor $E(z)$ megfelelő gyökének átlótávolsága $< \log(\sqrt{c}\,R)/R$.[5]



$E(z)$, ill. $K(z)$ görbéje, ha $c = 0.76855011$

Remény: Lehet, hogy $x = \log y + \log c$ helyett $x = \log y - \log\log(ky)$ is működik valamilyen 0.58433837^{-}-nál nem nagyobb k-val. Szépen viselkedik, ameddig a szem ellát, de bebizonyításához a fentieknél jobb érvek kellenének.



$x = \log y - \log\log 0.58433837$

[5] Fordítva csak majdnem-igaz.

Néhány gyök:

$E(z)$ legkisebb abszolút értékű gyökei a 0-n kívül:

$$\begin{aligned}
&\pm 1.45061616^+ \pm \mathbf{i}\ \ 1.88094300^+,\\
&\pm 2.24465927^+ \pm \mathbf{i}\ \ 2.61657514^+,\\
&\pm 2.83974105^- \pm \mathbf{i}\ \ 3.17562810^-.
\end{aligned}$$

$H(z)$ és $K(z)$ megfelelő gyökei:

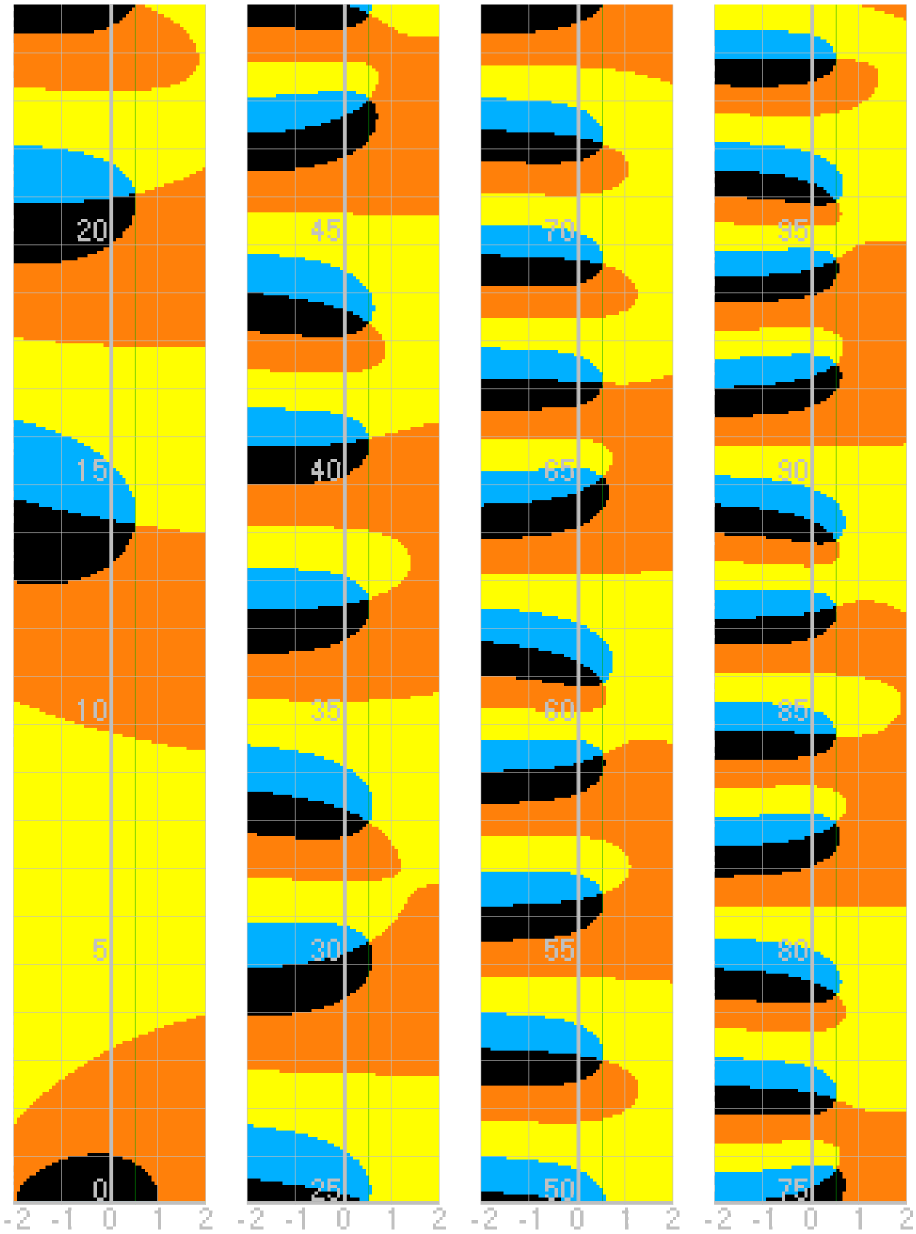
$$\begin{aligned}
&1.43365932^- \pm \mathbf{i}\ \ 5.45705264^-,\\
&1.80797021^+ \pm \mathbf{i}\,11.74663931^+,\\
&2.02048461^+ \pm \mathbf{i}\,18.03592293^-.
\end{aligned}$$

Testvérfüggvények:

$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\rho^2}\mathrm{d}\rho = E(z)+1/2$ és $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{z}^{\infty} e^{-\rho^2}\mathrm{d}\rho = 1/2-E(z)$ gyökeit csak átabotában vizsgáltam: $E(z)$ plusz kis valós konstans kvalitatíve ugyanazt a képet mutatja, mint $E(z)$, és a képletek felületes szemrevételezése alapján a gyökhelyei „közel vannak” $E(z)$ gyökhelyeihez; az $x = \log(cy)$ alakú gyökkorlátgörbe általánosan érvényesnek látszik, de *különböző* c-kig élesíthető.

Szórakoztatásul:

Egy szelet a ζ-függvényből



Az oszlopok balról jobbra egymás fölé képzelendők

Ez összekombinálható Jahnke–Emde-féle (vagy másféle) hegy- és vízrajzzal (erre itt nem volt ok).