Rónyai:

Előkerestem a régi papírt. Túl hosszú, nem zúdítom a nyakadba, csak a legegyszerűbb (és legkevesebbet igazoló) lépését írom le.

$$\varrho_k(s) := \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{1}{2}+s}.$$

D-függvény: $\sigma > 1$-re absz. konvergens Dirichlet-sorral előállítható függvény, amely egy végesrendű (vagy: elsőrendű) egész függvény és egy (esetleg konstans) polinom hányadosa.

Tekintsük az $f(s) = \varrho_k(s) f(1-s)$ megoldásait a D-függvények körében.

$k = 1$-re tudjuk (Hamburger–Siegel), hogy az egyetlen megoldás konst. $\zeta(s)$. (Ezért az alábbi érv éppen az „igazi" Riemann-függvényre nem fog adni semmit.)

De legyen pl. $k = p$, prím, és $\cancel{\geq 7}$ ≥ 11.

χ: olyan nem-tisztán valós p-edik karakter, amelyre $\chi(-1) = 1$.

$$\epsilon(\chi) := p^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{p} \chi(n) e^{2n\pi i/p}.$$

$$f_\chi(s) := \epsilon^{\frac{1}{2}}(\bar{\chi}) L(s,\chi) + \epsilon^{\frac{1}{2}}(\chi) L(s,\bar{\chi}).$$

Az ilyen karakterpárok száma $\left[\frac{p+1}{4}\right] - 1$, tehát ennyi f_χ van. ($p \equiv 1 \pmod 4$-re közéjük vehetjük $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{p}\right) \frac{1}{n^s}$-t is. – Egyébként mindezek valós s-re valósak, de erre most nem lesz szükség.)

$p \cancel{> 7}$ > 11 miatt egynél több f_χ van. Ezek lineárisan függetlenek. (Ez következik a karakterek lineáris függetlenségéből és a Dirichlet-sorok egyértelműségi tételéből.)

$f_\chi(s) = \varrho_p(s) f_\chi(1-s)$. (Észreveendő, hogy $\epsilon(\chi)\epsilon(\bar{\chi}) = 1$ és $\epsilon(\bar{\chi}) = \bar{\epsilon}(\chi)$.)

A függvényegyenletet a megoldások bármely lineáris kombinációja is kielégíti. (Trivi.) Ezek mind D-függvények. (Trivi.)

Tetszőleges c-hez megadható olyan lineáris kombináció, amely nem azonosan 0 és c-ben gyöke van. (A lineáris függetlenség miatt trivi.)

Kész.

Mellékhatás: A Riemann-sejtésről és a Lindelöf-sejtésről tudjuk, hogy L nem-erősebb R-nél abban az értelemben, hogy ha R igaz, akkor L is igaz. Ez oda élesíthető, hogy L igaz voltából <u>nem</u> következik R igaz volta. Ugyanis a lineáris kombinációk aszimptotikus tulajdonságai, speciálisan a Lindelöf-féle $\mu(\sigma)$-függvényei, ugyanazok, mint a kiinduló L-függvényekéi. Ezért ha igaz L, akkor van olyan függvény, amelyre L igaz és R nem: L állítása és R tagadása összeegyeztethető.

A fenti érvvel csak véges sok Riemann-sértő gyököt lehet garantálni. Alkalmasint ezt fel lehet piszkálni végtelen sokra. Mindenesetre érdekes, hogy a függvényeinknek $\sigma = \frac{1}{2}$-en mindenképpen végtelen sok gyökük van. (Ezt most nem részletezem.)

Az is igaz, hogy az ilyen függvényegyenleteknek eleget tevő különböző függvények végtelen sok gyöke <u>különbözik</u>. (Ezt sem részletezem.)

Érdekes kontraszt-darab: Van Dirichlet-soros függvény, amelynek ~~[illegible]~~ gyökei legalábbis a kritikus sáv jobbfelében <u>megegyeznek</u> a ζ-gyökökkel, de amely <u>semmiféle</u> ilyen függvényegyenletet nem elégít ki. Lásd a múltkori „Lang-együtthatós" Dirichlet-sort.

Bródy

PS.

Előzmények:

Titchmarsh szerint a Dirichlet-sor alakjából reménytelen dolog a Riemann-sejtésre következtetéseket levonni. Az ő summázata: "The problem of the zero-free region appears to be a question of extending the sphere of influence of the Euler product ... beyond its actual region of convergence."

Másfelől Hadamard (már 1899-ben) éppen az Euler-szorzat iránt nyilvánítja ki szkepszisét: "Il est probable qu'il ne faudrait pas chercher à démontrer la réalité des racines de l'équation $\zeta(\frac{1}{2}+wi) = 0$ par ... voie reposant sur la décomposition de $\zeta(u)$ en produit." És: "Or rien ne porte à croire qu'il n'existe pas une infinité de fonctions satisfaisant aux conditions précédentes, sans avoir leurs zéros situés sur la droite $R(u) = \frac{1}{2}$."

Így logikusnak látszott megpróbálni bevonni a sorvizsgálatba azokat a megszorításokat, amelyekről tudjuk, hogy a ζ- és L-függvényekre fennállnak: függvényegyenlet, aszimptotikus tulajdonságok.

Hát ez sem hessentette el nagy bajunk.