8. Gyakorlat

Folytonos valószínűségi változók transzformáltja, Együttes sűrűségfüggvény

1. Legyen X sűrűségfüggvénye $f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ha $0 < x < 1$ és 0 egyébként. Legyen $Y = X\sqrt{X}$.

   a) Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét.
   b) Határozzuk meg Y eloszlásfüggvényét.
   c) Határozzuk meg Y sűrűségfüggvényét.
   d) Határozzuk meg $\mathbb{E}(Y)$-et az Y sűrűségfüggvényével számolva.
   e) Vezessük le $\mathbb{E}\left(X\sqrt{X}\right)$-et az X sűrűségfüggvényével számolva is.

2. Legyen az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $x \mapsto F_X(x)$. Fejezzük ki az alábbi valószínűségi változók eloszlásfüggvényeit F_X segítségével:
   a) $Y = \max\{0; X\}$ b) $Z = -X$ c) $V = |X|$ d) $W = \min\{0; -X\}$.

3. Legyen $X \sim \mathrm{Exp}\,(\lambda)$ és $Y = X^2$. Adjuk meg Y sűrűségfüggvényét és várható értékét.

4. Legyen $X \sim U\,(0;1)$, illetve $Y = \sqrt{2X}$, $V = \ln \frac{1}{X}$ és $Z = \mathrm{arctg}(X)$. Adjuk meg Y, V és Z sűrűségfüggvényét.

5. Az autók fogyasztását Amerikában mérföld/gallon-ban (mpg) fejezik ki, azaz megadják, hogy hány mérföldet tesz meg a gépjármű egy gallon üzemanyaggal. Európában, mint ismeretes, a fogyasztást liter/(100 km) formában adják meg. Egy autóról tudjuk, hogy az X mpg fogyasztását az f_X sűrűségfüggvény jellemzi. Hogyan kell transzformálnunk f_X-et, ha áttérünk a liter/100km skálára? (1 mérföld $= a$ km, 1 gallon $= b$ liter, ahol $a = 1{,}609$ és $b = 3{,}785$).

---

6. Legyenek $X \sim U(0;3)$ és $Y \sim U(-1;4)$ független valószínűségi változók. Ábrázoljuk az (X,Y) együttes eloszlásfüggvényének szinthalmazait. Határozzuk meg az alábbi mennyiségeket:

   a) $\mathbb{P}(X < Y) = ?$ b) $\mathbb{P}(X + Y = 1) = ?$ c) $\mathbb{P}(XY < 1) = ?$

7. Legyenek $X, Y \sim U(0;1)$ függetlenek, $Z = 2X + 1$, $V = 3Y$. $\mathbb{P}(V < Z) = ?$

8. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y} : (x,y) \mapsto \begin{cases} 2(x^3 + y^3) & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

   a) $P(X + Y < 1) = ?$ b) $P(X^2 < Y) = ?$ c) Adjuk meg X és Y perem-sűrűségfüggvényét.
   d) $\mathbb{E}(X) = ?$ e) Független-e X és Y?

9. Az (X,Y) folytonos valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvényéről tudjuk, hogy minden $0 < x < 1$ és $|y| < 1$ esetén

$$F_{X,Y}(x,y) = \frac{xy^3 + x}{2}.$$

   Az X értékkészlete a $[0,1]$ intervallum, míg Y értékkészlete a $[-1,1]$. Mennyi a valószínűsége, hogy az (X,Y) pár az $A(0,0)$, $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ csúcspontok által meghatározott háromszög belsejébe esik? (Segítség: az együttes sűrűségfüggvény hasznos.)

10. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y} : (x,y) \mapsto \begin{cases} a(4x + y) + bxy + \frac{2}{5} & \text{ha } 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

   valamilyen a és b valós számok esetén. Milyen a és b értékek esetén lesznek X és Y független valószínűségi változók?

IMSc 7. Legyenek X és Y olyan nulla várható értékű valószínűségi változók, amire $\mathbb{D}^2(X) = 4$, $\mathbb{D}^2(Y) = 16$ és $\mathrm{corr}(X,Y) = -0{,}5$. Adott $a \in \mathbb{R}$ esetén definiáljuk a $W = (a \cdot X + 3 \cdot Y)^2$ valószínűségi változót. Milyen a választás esetén lesz a legkisebb W várható értéke, és mennyi ez a várható érték?