6. Gyakorlat

Poisson-eloszlás, Exponenciális-eloszlás, Diszkrét valószínűségi változók transzformáltja

1. Egy számítógépes szervizben egy hónap húsz munkanapjából átlagosan kettőn nincsen reklamáció. Poisson-eloszlást feltételezve mennyi annak a valószínűsége, hogy egy adott napon legalább három reklamáció érkezik?

2. Az egyetemen nagyon sok telefonkészülék van, amelyek egymástól függetlenül romlanak el azonos, egyenként kis valószínűséggel. Az év 360 napjából átlagosan 12 olyan nap van, hogy egyetlen készülék sem romlik el. Várhatóan hány telefon romlik el egy nap? Várhatóan hány olyan nap lesz, amikor 2 vagy 2-nél több telefon romlik el?

3. Lovas gátversenyen a ló az akadályok mindegyikét egymástól függetlenül, azonos valószínűséggel veri le. A pályán számtalan akadály akad. Ha 5% annak a valószínűsége, hogy a lovas hibátlanul teljesít egy kört, mennyi az esélye, hogy legfeljebb három akadályt ver le?

4. Egy futóversenyen a pályát sajnos kullanccsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban pontosan egy kullancsot, 75-en pedig kettőt. Ezek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen.

---

5. Legyen X exponenciális eloszlású valószínűségi változó, amiről tudjuk, hogy $\mathbb{P}(X > 3) = e^{-6}$.

   a) Mi X eloszlásának paramétere (λ)? b) $\mathbb{P}(X < 2) =?$ c) $\mathbb{E}(X) =?$

6. Tegyük fel, hogy egy adott mosógéptípus átlagosan 2 évig bírja az első meghibásodásig, és az első meghibásodás időpontja folytonos, örökifjú eloszlást követ. Mi a valószínűsége, hogy az első 3 év során nem hibásodik meg, ha tudjuk, hogy az első 2 évben hibátlanul működött?

7. Hullócsillagra várva kémleljük az eget egy kora augusztusi éjszaka. Tudjuk, hogy annak az esélye, hogy az első 20 percben látunk hullócsillagot $1-e^{-\frac{2}{3}}$. Feltehetjük, hogy egy hullócsillag észleléséig hátralévő idő nem függ az eddig eltelt idő hosszától (azaz az eloszlás folytonos, örökifjú). Mekkora eséllyel látunk hullócsillagot az első órában?

8. Legyenek X és Y exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Tudjuk, hogy X várható értéke kétszerese Y várható értékének, továbbá, hogy $3\,\mathbb{P}(X > 1) = 2\,\mathbb{P}(Y < 1)$. Mennyi X várható értéke?

---

9. Legyen X egy véletlenszerűen választott hónap sorszáma, árilistól decemberig. Annak az esélye, hogy az i-edik hónapot választjuk ki $\frac{i}{72}$ ($\forall i = 4, \ldots, 12$). Legyen $Y = (-1)^X$.

   a) Határozzuk meg Y eloszlását.
   b) Határozzuk meg $\mathbb{E}(Y)$-t az Y eloszlásával számolva.
   c) Vezessük le $\mathbb{E}\left((-1)^X\right)$-et az X eloszlásával számolva is.

10. Egy szabályos tetraéder oldalaira felírtuk az első négy pozitív prímszámot. Háromszor dobunk vele. Jelölje X a dobott 7-esek számát, és legyen $Y = X^2$, $Z = X^2 + X + 1$. Határozzuk meg Y és Z várható értékét.

11. Legyen $X \sim \text{Pois}(3)$ és $Y = 3X - 1$ és $Z = X^2 - X$. Határozzuk meg

    a) Y eloszlásfüggvényének értékét a π helyen, és
    b) Z várható értékét.

12. Független kísérleteket végzünk, melyek külön-külön mind p valószínűséggel sikerülnek. Addig ismételgetjük a kísérletet, amíg 3 sikeres nem lesz. Jelölje X az ehhez szükséges sikertelen kísérletek számát. Határozzuk meg az $\mathbb{E}\left(\frac{1}{(X+2)(X+1)}\right)$ értéket (p függvényében).

13. Dobjunk egy szabályos dobókockával, jelölje az eredményt X. Adjuk meg $Y = |X - 3|$ eloszlásfüggvényét. Határozzuk meg az $\int_0^\infty (1 - F_Y(y))\mathrm{d}y$ és az $\mathbb{E}(Y)$ mennyiségeket.