4. Gyakorlat

Diszkrét valószínűségi változók, Várható érték, Geometriai eloszlás

1. Dobjunk fel egy szabályos érmét háromszor. Legyen az Ω eseménytér a 3 hosszú fej-írás sorozatok halmaza, és jelöljük az elemeit értelemszerűen: $FFF, FIF, \dots$ jelsorozatokkal. Definiáljuk az $X : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényt az FFF kimenetelen 0-nak, és minden más kimenetel esetén az első "írás" jel sorszámának (pl. $X(FIF) = 2$).
   (a) Mekkora az esélye, hogy X páratlan?
   (b) Definiáljuk Y-t ugyanúgy, mint X-et, azzal az eltéréssel, hogy $Y(FFF)$ véletlenszerűen vagy 0 vagy 1 értéket vesz fel. Valószínűségi változó-e Y az Ω eseménytéren?

2. Legyen A, B és C három esemény, melyek valószínűségei és metszeteinek valószínűségei a következők:
   $$\mathbb{P}(A) = 0{,}5 \qquad \mathbb{P}(B) = 0{,}4 \qquad \mathbb{P}(C) = 0{,}3 \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = 0{,}3$$
   $$\mathbb{P}(B \cap C) = 0{,}2 \qquad \mathbb{P}(C \cap A) = 0{,}1 \qquad \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0{,}1$$
   Az A, B és C események közül bekövetkező események számát jelölje Y. Mennyi $\mathbb{P}(0 < Y < 3)$?

3. Dobjunk két 10 oldalú dobókockával, jelölje az eredményeiket X és Y. Mennyi $\mathbb{P}(X \leq Y)$?

---

4. Két kockával dobva, mennyi a dobott számok maximumának várható értéke?

5. Tegyük fel, hogy az 5-ös lottó nyereményei rögzítettek: az 5-ös találat 1 millárd, a 4-es 6 millió, a 3-as 35 ezer, míg a 2-es kétezer forintot nyer. Egy szelvénnyel mennyi a nyereményünk várható értéke?

6. Egy érmével addig dobunk, amíg először fordul elő, hogy két egymás utáni dobás értéke azonos. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke?

7. Egy boltban izzókat árulnak. Az izzók 1%-a hibás. Ha veszünk 100 darabot, akkor
   (a) Mekkora eséllyel lesz legfeljebb három hibás?
   (b) Várhatóan hány hibását vettünk?
   (c*) Hány lesz közülük rossz a legnagyobb valószínűséggel?

8. Jelölje X egy kockadobás eredményét. Mennyi $\mathbb{E}\left((X-3)^2\right)$?

---

9. Válasszunk egymástól függetlenül, véletlenszerűen pontokat az egységintervallumban. Addig folytatjuk a pontok választását, amíg valamelyik az intervallum középső harmadába nem esik. Jelölje X a kiválasztott pontok számát. Mekkora a $\mathbb{P}(X < 5)$ valószínűség?

10. A $[-1, 1] \times [-1, 1]$ négyzeten egymás után (egymástól függetlenül, egyenletesen) véletlenszerűen pontokat választunk. Akkor állunk meg, amikor az első kisorsolt pont beleesik az origó középpontú egységkörbe. Mi a pontok számának eloszlása? Mennyi a pontok számának várható értéke?

11. Egy szabályos pénzérmét addig dobunk fel újra és újra, amíg meg nem kapjuk a második fejet is. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első fej után a második fejig ugyanannyi dobásra van szükség, mint amennyi az elsőig kellett?

IMSc 4. Bárcsakfalván a dobókockákat 0-tól 5-ig számozzák. Az említett helység egy ráérős lakója dob két szabályos helybéli dobókockával, jelölje a dobások eredményét X_1 és X_2. Majd elkészít egy téglatest alakú dobozt, aminek a hossza a két dobott szám minimuma, a szélessége a két dobott szám közti eltérés, és a magassága $|X_1 + X_2 - 5|$. Mi a valószínűsége, hogy semmi nem fér a dobozba (azaz nulla a térfogata)?