

10. Gyakorlat

Kovariancia folytonos esetben, Lineáris regresszió

1. Legyenek X és Y független valószínűségi változók, ahol $\mathbb{E}(X) = 4$, $\mathbb{E}(Y) = 0$, $\mathbb{D}^2(X) = 1$, $\mathbb{D}^2(Y) = 2$. Határozzuk meg az $\mathbb{E}(5X - 6Y)$, $\mathbb{E}(XY)$, $\mathbb{D}^2(5X - 6Y + 8)$ és $\text{cov}(5X + 2Y + 2, X + 6Y - 3)$ mennyiségeket.
2. Legyenek $X, Y \sim U(0; 1)$ függetlenek, továbbá $Z_1 = XY$ és $Z_2 = X + Y$.
 - a) Adjuk meg Z_1 és Z_2 várható értékét.
 - b) Igaz-e, hogy $\mathbb{D}^2(XY)$ megegyezik $\mathbb{D}^2(X) \cdot \mathbb{D}^2(Y)$ -nal?
 - c) Adjuk meg $\mathbb{D}^2(Z_1 + 2Z_2)$ -t.
3. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y} : (x, y) \mapsto \begin{cases} 2(x^3 + y^3) & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a $\text{cov}(X, Y)$ -t.

4. Legyen $X \sim N(m; \sigma^2)$, $Y = 3X + 8$, $Z = 5 - 2X$. Számoljuk ki az $\text{corr}(Y, Z)$ korrelációs együtthatót.
5. Legyen $X \sim U(0; 2\pi)$, $Y = \cos(X)$ és $Z = \sin(X)$. Határozzuk meg $\text{cov}(Y, Z)$ -t. Független-e Y és Z ?
6. Legyen U és V együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{U,V} : (u, v) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{v}} & \text{ha } 0 < u < 1 \text{ és } 0 < v < u^2, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg $\text{cov}(U, V^2)$ -et.

7. Legyenek X_1, X_2 és X_3 korrelálatlan valószínűségi változók, mind 0 várható értékkel és 1 szórással.
 - a) Mennyi $\text{cov}(X_1 + X_2, X_2 + X_3)$, $\mathbb{D}^2(X_1 + X_2)$ és $\mathbb{D}^2(X_2 + X_3)$?
 - b) Mekkora a korreláció $X_1 + X_2$ és $X_2 + X_3$ között?
 - c) Mi a regressziós egyenese $X_2 + X_3$ -nek $X_1 + X_2$ -re?
 - d) Mekkora a fenti regressziós egyenessel történő közelítés hibájának szórásnégyzete?
8. Határozzuk meg az $X^2 + X + 1$ regressziós egyenesét X -re, ha X eloszlása
 - a) $\text{Exp}(5)$
 - b) $N(0; 1)$
 - c*) $B(10; 0,3)$
9. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye a fenti 3. feladatban szereplő $f_{X,Y}$. Tudván, hogy $\mathbb{D}^2(X) = 0,0775$, mi az Y regressziós egyenese X -re, illetve X regressziós egyenese Y -ra? Mekkora a regressziós egyenes átlagos négyzetes hibája (azaz a hiba szórásnégyzete)?
10. Tegyük fel, hogy Y regressziós egyenese X -re: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x - 2\}$, míg X regressziós egyenese Y -ra: $\{(y, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \frac{1}{4}y - \frac{11}{2}\}$. Mennyi $\mathbb{E}(X)$ és $\mathbb{E}(Y)$?
11. Két dobókockával dobunk. Legyen X a dobott hatosok száma, Y a dobott párosok száma. Mi Y regressziós egyenese X -re, illetve X regressziós egyenese Y -ra?

IMSc 9. Legyenek X_1 és X_2 független, $U(0; 1)$ eloszlású valószínűségi változók, és jelölje Y a maximumukat, Z a minimumukat. Határozzuk meg a $\text{corr}(Y, Z)$ mennyiséget.