1. Gyakorlat

Eseményalgebra, Poincaré-formula

1. Feldobunk két pénzérmét. Hány elemű az eseménytér? Mik az egyes események valószínűségei?

2. Feldobunk két dobókockát. Legyenek A és B események, ahol A azon kimenetelek halmaza, amelyeknél a dobott számok összege kétjegyű, B pedig amelyeknél a dobott számok összege páros. Tudván, hogy A és B események, események-e az alábbiak is?

   a) a dobott számok összege egész
   b) a dobott számok összege irracionális
   c) a dobott számok összege 11
   d) a dobott számok összege 7

3. Egy pakli francia kártyából félretesszük a figurásakat, majd kihúzunk néhány lapot. Legyen A_i az az esemény, hogy húztunk i értékű lapot, P, Ka, T, Ko rendre, hogy húztunk pikk, káró, treff vagy kőr lapot, B_i pedig, hogy i darab lapot húztunk. Fejezzük ki a fentiek segítségével az alábbiakat, ahol lehetséges.

   a) a káró 7-est húzzuk (mást nem)
   b) 4-nél kevesebb lapot húzunk
   c) minden kihúzott lap pikk vagy treff
   d) 3 darab 7-est húzunk (mást nem)
   e) 4 darab 7-est és 4 darab 10-est húzunk (mást nem)
   f) 3 darab 7-est és még 1 valami mást húzunk(*)

4. Milyen A és B eseményekre igazak az alábbiak?

   a) $A = A \cap B$ b) $A = A \cup B$ c) $A = A \cap \overline{B}$ d) $A \cup B = A \cap B$

5. Három kockával dobunk. Legyenek

$$A = \{\text{az összeg 7}\} \qquad B = \{\text{mindegyik páros}\} \qquad C = \{\text{van közöttük hármas}\}$$

   események. Számoljuk ki a $\mathbb{P}(A \cap (B \cup \overline{C}))$ és $\mathbb{P}((A \cup C) \cap \overline{B})$ valószínűségeket.

6. Tekintsük az összes olyan n hosszúságú sorozatot, amelyek 0, 1, 2 számokból állnak. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen választott ilyen típusú sorozat:

   a) 0-val kezdődik,
   b) pontosan m db 1-est tartalmaz,
   c) pontosan $m + 2$ db 0-t tartalmaz, amelyek közül kettő a sorozat végén van,
   d) pontosan m_0 db 0-t, m_1 db 1-est és m_2 db 2-est tartalmaz.

7. Igazoljuk, hogy bármely A és B eseményre $\mathbb{P}(A \cap B)\,\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) \leq \frac{1}{4}$.

---

8. Az 5-ös lottó sorsoláson 1-től 90-ig számozott golyókból húznak ki 5 különbözőt. Legyen A az az esemény, hogy mindegyik kihúzott szám legfeljebb 50; B az az esemény, hogy mindegyik kihúzott szám páros; és C az az esemény, hogy mindegyik kihúzott szám legalább 20. Számoljuk ki a $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}(B \cap C)$ és $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$ valószínűségeket.

9. Két szabályos pénzérmét n-szer feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobások során mind a "két fej", mind a "két írás" esetekkel találkozunk.

10. Igazoljuk, hogy $\mathbb{P}(A) = 0{,}7$, $\mathbb{P}(B) = 0{,}6$, $\mathbb{P}(C) = 0{,}9$ esetén igazak az alábbiak.

    a) $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0{,}3$ b) $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \geq 0{,}2$

    Milyen (alsó és felső) korlátokat adhatunk a $\mathbb{P}(A \cup B)$ és a $\mathbb{P}(A \cup (B \cap C))$ valószínűségekre?

11. Igazoljuk, hogy bármilyen $n \geq 1$ egészre és $A_1, \ldots, A_n$ eseményekre teljesül a következő egyenlőtlenség: $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \geq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n) - n + 1$.

IMSc 1. Van 5 piros és 5 kék hogyishívjákunk, amiket véletlenszerűen egy sorba rendezünk (tekintet nélkül a színükre). Két szomszédosat vegyes párnak hívunk, ha különböző színűek.

a) Mi az esélye, hogy a sorból ki tudunk választani 5 vegyes párt, átfedés nélkül (azaz a párok tagjai mind különbözőek)?

b) És ha nem 5, hanem 6 piros (de továbbra is csak 5 kék) van?