

# Valószínűségszámítás

---

2021. november 3.  
Mészáros Szabolcs

Tárgyhonlap:  
[cs.bme.hu/valszam](https://cs.bme.hu/valszam)

A prezentáció anyagát és az abból készült videofelvételt a tárgy hallgatói jogosultak használni, kizárólag saját célra. A felvétel másolása, videómegosztókra való feltöltése részben vagy egészben tilos, illetve csak a tantárgyfelelős előzetes engedélyével történhet.

Copyright © 2021, BME VIK

# Val. változók együttes függetlensége

**Definíció:** Az  $X_1, \dots, X_n$  val. változók (együttesen) függetlenek, ha az

$$\{X_1 < x_1\}, \dots, \{X_n < x_n\}$$

események függetlenek minden  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  esetén.

## Megjegyzések:

- Példákat lásd még: két-változós, diszkrét esetről.
- Tipikus példa: független kísérletek (számszerű) eredményei.
- Intuitívan “összefüggő” val. változókról is kiderülhet, hogy függetlenek.
- Ahogy események esetén is, függetlenek részhalmaza független.

# Függetlenség, karakterizáció

**Állítás:** Az  $X_1, \dots, X_n$  val. változók pontosan akkor függetlenek, ha

$$F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n)$$

tetszőleges  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  esetén.

**Állítás:** Az  $X_1, \dots, X_n$  folytonos val. változók pontosan akkor függetlenek, ha  $(X_1, \dots, X_n)$  folytonos val. vektorváltozó, és

$$f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n)$$

tetszőleges  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  esetén.

## Függetlenség, példa

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 12 \cdot e^{-4x-3y} & \text{ha } x, y > 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$\mathbb{D}^2(X + Y) = ?$$

$$12 \cdot e^{-4x-3y} = 4e^{-4x} \cdot 3e^{-3y} = f_X(x) \cdot f_Y(y) \\ \Rightarrow \text{független}$$

$$\mathbb{D}^2(X + Y) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(Y) \quad \mathbb{D}^2(X) = ?$$

# Ismétlés: szórásnégyzet

**Definíció:** Egy  $X$  valószínűségi változó *szórásnégyzete*

$$\mathbb{D}^2(X) = \text{cov}(X, X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

(Akkor is értelmes, ha  $X$  folytonos.)

Kiszámolása: transzformált várható értékével

$$\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx - \left( \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \right)^2$$

## Szórásnégyzet, folyt. példa

**Példa:**  $Z \sim \text{Exp}(\lambda)$      $\mathbb{D}^2(Z) = ?$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z^2) &= \int_0^{\infty} z^2 \lambda e^{-\lambda z} dz = & \mathbb{D}^2(Z) &= \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \left[ -e^{-\lambda z} z^2 \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-\lambda z} 2z dz & & \uparrow \\ &= 0 + \left[ 2z \left( -\frac{1}{\lambda} \right) e^{-\lambda z} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2 \left( -\frac{1}{\lambda} \right) e^{-\lambda z} dz = \frac{2}{\lambda^2}\end{aligned}$$

# “A” nevezetes eloszlás

Mi a közös az alábbi véletlen mennyiségek eloszlásában?

Emberek magasságai, lábmérete, születési súlya, vérnyomása, napi átlaghőmérséklet (az év adott napján), páratartalom, mérési hiba egy kísérletben, zaj.

Sok tényező apró, független tényező folytonos eredménye.

Elnevezések: normális eloszlás, Gauss-eloszlás, haranggörbe (a sűrűségfüggvénye).



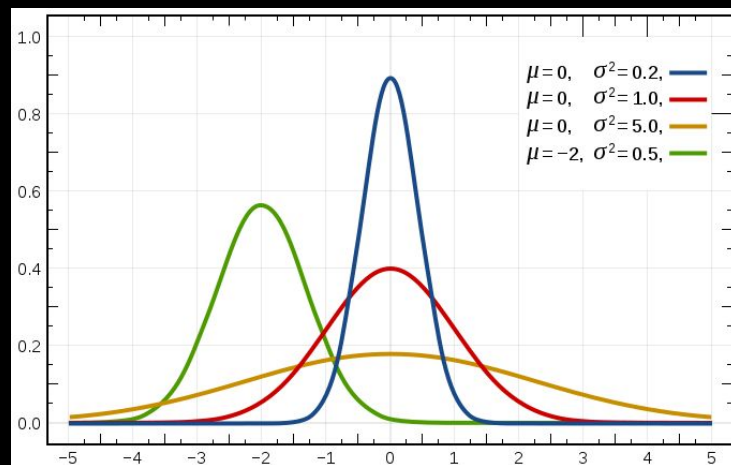
# Normális eloszlás, def.

**Definíció:** Egy  $Y$  val. változó *normális eloszlású*  $\mu$  és  $\sigma^2$  paraméterekkel (ahol  $\sigma^2 > 0$ ), ha sűrűségfüggvénye:

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

**Jelölés:**  $Y \sim N(\mu; \sigma^2)$

**Speciális eset:**  $N(0; 1)$  Neve: standard normális



# Standard normális eloszlás

**Jelölés:** standard normális sűrűségfüggvényére

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

**Állítás:**  $\varphi$  sűrűségfüggvény, vagyis a teljes  $\mathbb{R}$ -en vett integrálja 1.

Ötlet:

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy$$

# Standard normális eloszlás

**Biz. vázlat:**

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \underbrace{\int_0^R e^{-\frac{r^2}{2}} r \, dr}_{\left[ -e^{-\frac{r^2}{2}} \right]_0^R} d\alpha$$

$$\left[ -e^{-\frac{r^2}{2}} \right]_0^R = -e^{-\frac{R^2}{2}} + 1$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} 2\pi(1 - e^{-\frac{R^2}{2}}) = 2\pi \implies \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2 = 2\pi$$

# Standardizálás, lemma

**Kérdés:** A nem-standard normális eloszlásra megadott függvények is sűrűségfüggvények?

Direkt számolás helyett:

**Lemma:** Legyen  $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  és  $X$  sűrűségfüggvénye  $f_X$ .

Ekkor  $Y = \sigma X + \mu$  sűrűségfüggvénye

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sigma} f_X\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

## Standardizálás, lemma biz.

**Biz:** A megadott függvény nemnegatív, így már csak az integrálját kell kiszámoljuk minden  $a$ -ra:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sigma} f_X\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) dx &\stackrel{z = \frac{x - \mu}{\sigma}}{=} \int_{-\infty}^{\frac{a - \mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma} f_X(z) \sigma dz = \\ &= F_X\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) = \mathbb{P}\left(X < \frac{a - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \mathbb{P}(\sigma X + \mu < a) = \mathbb{P}(Y < a) = F_Y(a) \end{aligned}$$

# Standardizálás normálisra

## Következmény:

- $Y$  pontosan akkor  $N(\mu; \sigma^2)$  eloszlású, ha létezik  $X \sim N(0; 1)$ , amire  $Y = \sigma X + \mu$
- Tehát a normális eloszlás valóban valószínűség-eloszlás.

**Biz:** Ha  $X \sim N(0; 1)$  és  $Y = \sigma X + \mu$ , akkor a lemma miatt

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sigma} f_X\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

# Standardizálás normálisra, biz.

Visszafelé: ha  $Y \sim N(\mu; \sigma^2)$  akkor legyen

$$X = \frac{1}{\sigma}(Y - \mu)$$

Ismét a lemma miatt

$$f_X(z) = \sigma f_Y(\sigma z + \mu) = \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\sigma z + \mu - \mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

**Kérdések:** Mi a normális eloszlás

1. eloszlásfüggvénye,
2. várható értéke,
3. szórása?

# Norm. elo., eloszlásfüggvény

**Jelölés:** A standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye:

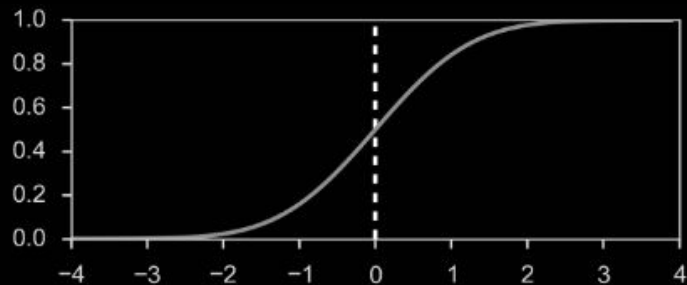
$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(z) dz = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

**Kérdés:** Oké, és *integráljel nélkül?*

Ez elemi függvényekkel nem kifejezhető.

Ehelyett közelítéseket használunk a fenti integrál(ok)ra.

Hasznos összefüggés:  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \quad (x \in \mathbb{R})$





# Norm. elo., eloszlásfüggvény

A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének táblázata

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

x	0,00	0,01	0,02
0,0	0,5000	0,5040	0,5080
0,1	0,5398	0,5438	0,5478
0,2	0,5793	0,5832	0,5871
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
0,4	0,6554	0,6591	0,6628
0,5	0,6915	0,6950	0,6985

$$\Phi(0,21) = 0,5832$$

$$\Phi(0,315) = 0,6236$$

$$\Phi(-0,11) = 1 - 0,5438 = 0,4562$$

# Norm. elo., eloszlásfüggvény

**Példa:** Egy zajos csatornán egy +/-1 értékű jelet próbálunk átjuttatni. A zaj miatt a megkapott jel értéke nem feltétlenül +/-1, hanem a jel értéke plusz egy  $N(0; \sigma^2)$  eloszlású véletlen szám. Határozzuk meg  $\sigma$ -t, ha tudjuk, hogy annak az esélye, hogy egy “+1” jel esetén negatív érték jut át a csatornán, 0,0226?

Zaj:  $Y \sim N(0; \sigma^2)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(+1 + Y < 0) &= \mathbb{P}(Y < -1) = \mathbb{P}\left(\frac{Y}{\sigma} < \frac{-1}{\sigma}\right) = \\ &= \Phi\left(-\frac{1}{\sigma}\right) = 0,0226 \implies \sigma = \frac{1}{2,00}\end{aligned}$$

# Norm. elo., várható érték

**Állítás:** Legyen  $Y \sim N(\mu; \sigma^2)$ . Ekkor

$$\mathbb{E}(Y) = \mu \qquad \mathbb{D}^2(Y) = \sigma^2$$

Normális eloszlás standardizálása:

$$\frac{Y - \mathbb{E}Y}{\mathbb{D}(Y)} \sim N(0; 1)$$

**Megjegyzés:** Más eloszlású val. változót is standardizálhatunk (levonva a várható értékét, és leosztva a szórásával). Ez a standardizált persze tipikusan nem lesz standard normális eloszlású.

# Norm. elo., várható érték

Állítás bizonyítása:

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\sigma X + \mu) = \sigma \mathbb{E}(X) + \mu$$

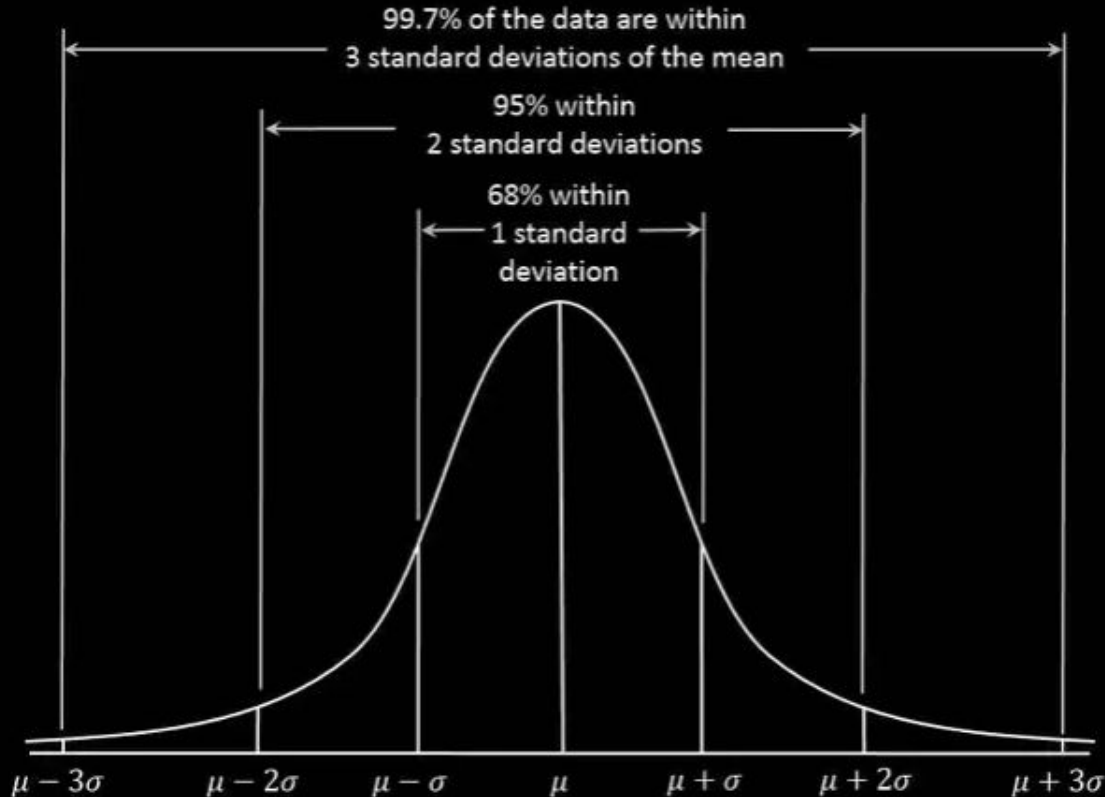
$$\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{D}^2(\sigma X + \mu) = \mathbb{D}^2(\sigma X) = \sigma^2 \mathbb{D}^2(X)$$

Tehát elég a standard normálisra kiszámolni az állítást.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ -e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = (\text{parciális integrálás}) = 1$$

# Norm. elo., szórás



Normális eloszlás  
szórása szemléletesen:

- az esetek kb. 68%-át lefedi a  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$  intervallum,
- a sűrűségfüggvény a  $\mu \pm \sigma$  pontoknál vált konvexitást.

## Norm. elo., példa

**Példa:** minta hőmérséklete (°C) Jel.:  $Y$   
 $\sim N(-2; 1,69)$  Mi a valószínűsége, hogy  
a minta hőmérséklete nagyobb, mint 0 °C?

Kérdés:  $\mathbb{P}(Y > 0) = ?$  Standardizált:  $X = \frac{Y + 2}{\sqrt{1,69}} \sim N(0; 1)$

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y + 2}{1,3} < x\right) = \mathbb{P}(X < x) = \Phi(x)$$

$$\mathbb{P}(Y > 0) = 1 - \mathbb{P}(Y < 0) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{Y + 2}{1,3} < \frac{2}{1,3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2}{1,3}\right)$$

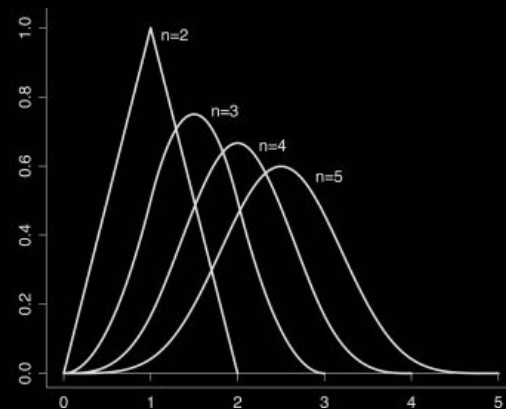
$$\mathbb{P}(Y > 0) \approx 0,0620 \approx 6\%$$

# Kitérő: konvolúció

**Definíció:** Legyenek  $X$  és  $Y$  független val. változók.  
Ekkor  $X + Y$  eloszlását az  $X$  és  $Y$  konvolúciójának hívjuk.

## Példák:

- Egyenletes eloszlások összege: Irwin-Hall eloszlás
- A binomiális eloszlás független indikátorok összege.
- Ha a két változó  $\text{Geo}(p)$  eloszlású, akkor az összeg “negatív binomiális”.



# de Moivre–Laplace-tétel

**Kérdés:** Miért jön elő alkalmazásokban, mérési eredményeknél?

**Tétel:** Legyen  $p \in (0, 1)$  és  $S_n \sim B(n; p)$ .  
Ekkor minden  $a < b$  valós számokra:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( a < \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\mathbb{D}(S_n)} < b \right) &= \\ &= \int_a^b \varphi(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a) \end{aligned}$$



# de Moivre–Laplace-tétel, példa

**Példa:** A matematikusok 31,4% százaléka szandált hord. Száz találomra választott matematikust nézve, közelítőleg mi az esélye, hogy kevesebb, mint 25 pár szandált találunk rajtuk?

Szandálok száma:  $S_n \sim B(n; p)$        $n = 100$        $p = 0,314$

$$\mathbb{E}(S_n) = np = 31,4 \quad \mathbb{D}(S_n) = \sqrt{np(1-p)} = 4,6412$$

$$\frac{1}{4,6412}(S_n - 31,4) \text{ közelítőleg } N(0; 1)$$

$$\mathbb{P}(S_n < 25) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n - 31,4}{4,6412} < \frac{25 - 31,4}{4,6412}\right) \approx \Phi(-1,3790)$$

← -1,3790

# de Moivre–Laplace-tétel, megj.

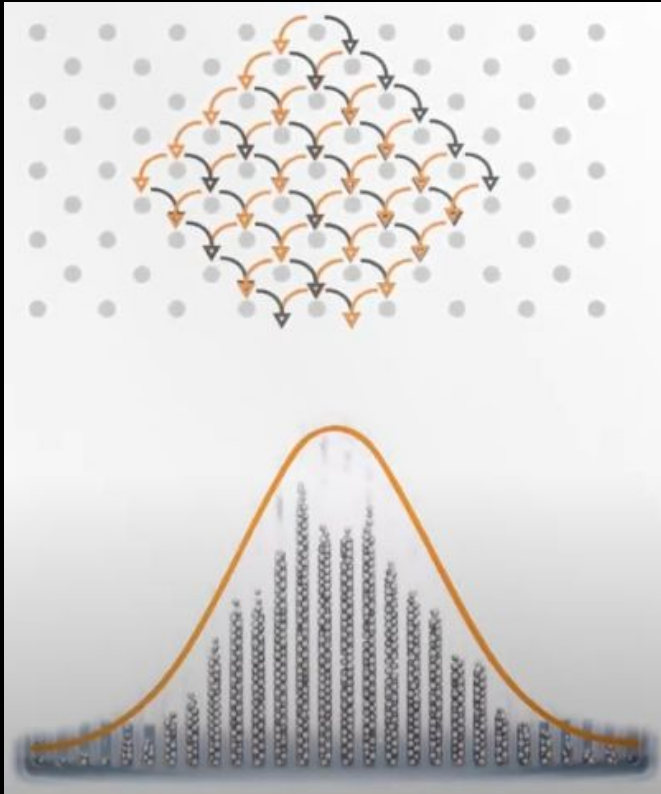
**Kérdés:** Nem ezt mondtuk a Poisson eloszlásnál is, hogy a binomiális határeloszlása a Poisson? Most meg azt mondjuk, hogy a binomiális határeloszlása a normális?

**Válasz:** A részletek eltérnek.

- Ott nem vontunk le ( $n$ -től függő) várható értéket, itt igen.
- Ott nem osztottunk le ( $n$ -től függő) szórással, itt igen.
- Ott  $p_n \rightarrow 0$  és  $np_n = \lambda$  volt feltétel, itt  $p$  konstans.

**Megjegyzés:** A konvergencia sebességéről is lehet tudni konkrétumot, lásd Berry–Esseen tétel.

# Galton-deszka



Egy golyó vég-pozíciójának eloszlása:

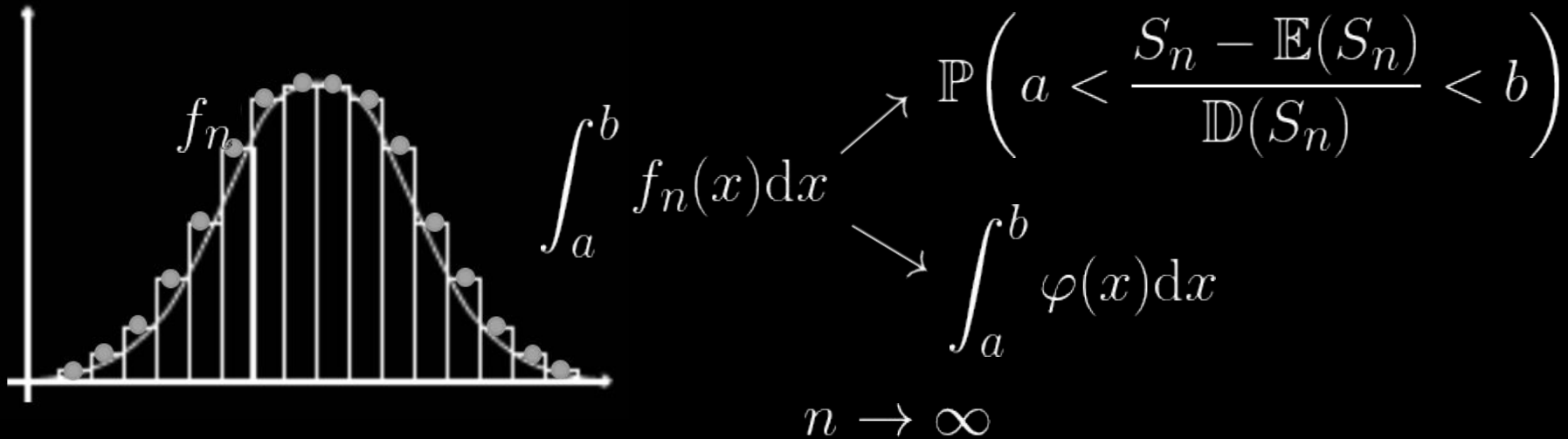
$$B\left(n; \frac{1}{2}\right) \text{ (a bal széléről számolva)}$$

Mit szemléltet? A binomiális eloszlás közelíti a normális eloszlás sűrűségfüggvényét.

# de Moivre–Laplace-tétel, levezetés

**Biz vázlat:** A standardizált  $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\mathbb{D}(S_n)}$  változó eloszlásából

készítsünk  $f_n$  sűrűségfüggvény-szerűséget:



# de Moivre–Laplace-tétel, levezetés

Honnan tudjuk, hogy  $f_n \rightarrow \varphi$ ?

Az  $f_n$  függvények közelítőleg teljesítenek egy diff-egyenletet:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'_n(x)}{f_n(x)} = -x$$

Miért jó ez? Mert ebből a  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  függvényre belátható, hogy

$$-x = f'(x)/f(x) \implies f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} e^c$$

Nem-triviális részletek:

- létezik-e a fenti határérték?
- a határértékfüggvény deriválható-e?
- igaz-e a határértékfüggvényre a diff-egyenlet?

Köszönöm a figyelmet!

---