Valószínűségszámítás

2021. október 27.

Mészáros Szabolcs

Tárgyhonlap:
cs.bme.hu/valszam

Kovariancia, definíció

Definíció: Az X és Y valószínűségi változók *kovarianciá*ja:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)\big)$$

A továbbiakban mindig feltesszük, hogy $\operatorname{cov}(X,Y)$ létezik.

Állítás:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Bizonyítás: $\mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)\big) =$

$$= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X)Y\Big) - \mathbb{E}\Big(X\mathbb{E}(Y)\Big) + \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\Big) =$$

Kovariancia, tulajdonságok

Biz. (folytatás): $\operatorname{cov}(X,Y) = \dots$

$$= \mathbb{E}(XY) + (-1 - 1 + 1)\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

$$= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Következmény:

1. Ha valamelyikük konstans, akkor a kovariancia nulla.
2. Ha függetlenek, akkor a kovariancia nulla.
3. Attól, hogy a kovariancia nulla, még nem feltétlenül lesznek függetlenek.

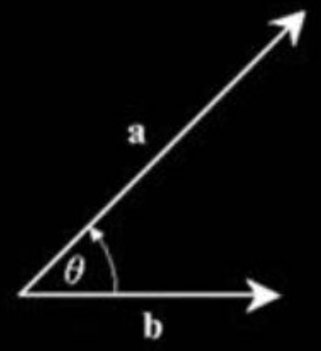
Kovariancia, példa

Példa (folytatás):

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) =$$
$$= 3{,}2 - 3{,}8 \cdot 1 = -0{,}6$$

Geometriai kép:

A kovariancia hasonlóan működik a skaláris szorzathoz.
A merőlegesség szerepét, a *"korrelálatlanság"* veszi át, azaz amikor a kovariancia 0 (ami a függetlenségnél gyengébb feltétel).



Szórásnégyzet, definíció

Definíció: Egy X valószínűségi változó szórásnégyzete

$$\operatorname{cov}(X, X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}X)^2\big) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Jelölés: $\mathbb{D}^2(X)$

Értelmezés:

0) Önmagával való együtt változás? Annak így nincs sok értelme.
1) “átlagos négyzetes eltérés” (a várható értéktől)
2) Ha a kovariancia a skalár szorzat analógiája, akkor a szórásnégyzet a hossznégyzeté.

Szórásnégyzet, tulajdonságok

Definíció: X *szórása* $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X)}$

Kérdés: Miért nem a következővel mérjük a várható értéktől való eltérést:

$$\mathbb{E}\Big(\big|X - \mathbb{E}(X)\big|\Big)$$

Állítás: Ha X és Y függetlenek, akkor

$$\mathbb{D}^2(X + Y) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(Y)$$

Szórásnégyzet, tulajdonságok

Bizonyítás:

$$\mathbb{D}^2(X+Y) = \mathbb{E}\big((X+Y)^2\big) - \big(\mathbb{E}(X+Y)\big)^2 =$$
$$= \mathbb{E}(X^2)+\mathbb{E}(Y^2)+2\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)^2$$
$$-\mathbb{E}(Y)^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$
$$= \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(Y) + 2\operatorname{cov}(X,Y)$$

Mivel a változók függetlenek, ezért a kovariancia 0 és az állítás következik.

Állítás:

$$\mathbb{D}(X+c) = \mathbb{D}(X) \quad \mathbb{D}(cX) = |c|\mathbb{D}(X) \quad (\forall c \in \mathbb{R})$$

Szórásnégyzet, példák

1) kockadobás szórásnégyzete: $\mathbb{E}(K^2) = \frac{91}{6} \quad \mathbb{E}(K) = \frac{7}{2}$

$$\Rightarrow \mathbb{D}^2(K) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \approx 2{,}9167$$

2) indikátor val. változó szórásnégyzete:

$$\mathbb{D}^2(\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A^2) - \mathbb{E}(\mathbf{1}_A)^2 = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A) - \mathbb{E}(\mathbf{1}_A)^2 =$$

$$= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)^2 = p(1-p)$$

Szórásnégyzet, példák

3) binomiális eloszlás szórásnégyzete: $X \sim B(n;p)$

$$X = \mathbf{1}_{A_1} + \ldots + \mathbf{1}_{A_n}$$

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{D}^2(\mathbf{1}_{A_1} + \cdots + \mathbf{1}_{A_n}) =$$

$$= \mathbb{D}^2(\mathbf{1}_{A_1}) + \cdots + \mathbb{D}^2(\mathbf{1}_{A_n}) = np(1-p)$$

4) geometriai eloszlás szórásnégyzete: $T \sim \mathrm{Geo}(p)$

$$\mathbb{D}^2(T) = \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}(T)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^{k-1}p - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

Szórásnégyzet, példák

5) Poisson-eloszlás szórásnégyzete: $Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$

$$\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 =$$
$$= \mathbb{E}(Y^2 - Y) + \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y)^2$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 - k) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \lambda - \lambda^2$$
$$= \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Korreláció, definíció

Kérdés: a példában kapott $\operatorname{cov}(X, Y) = -0{,}6$ mit jelent a val. változókra nézve? Ők most mennyire nem függetlenek?

Definíció: Legyenek X és Y olyan valószínűségi változók, amikre $\operatorname{cov}(X, Y)$, $\mathbb{D}(X)$ és $\mathbb{D}(Y)$ létezik és véges. Ekkor a korrelációjuk:

$$\operatorname{corr}(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\mathbb{D}(X)\mathbb{D}(Y)}$$

Értelmezés:

A geometriai analógiában ez a bezárt szög koszinusza

Korreláció, tulajdonságok

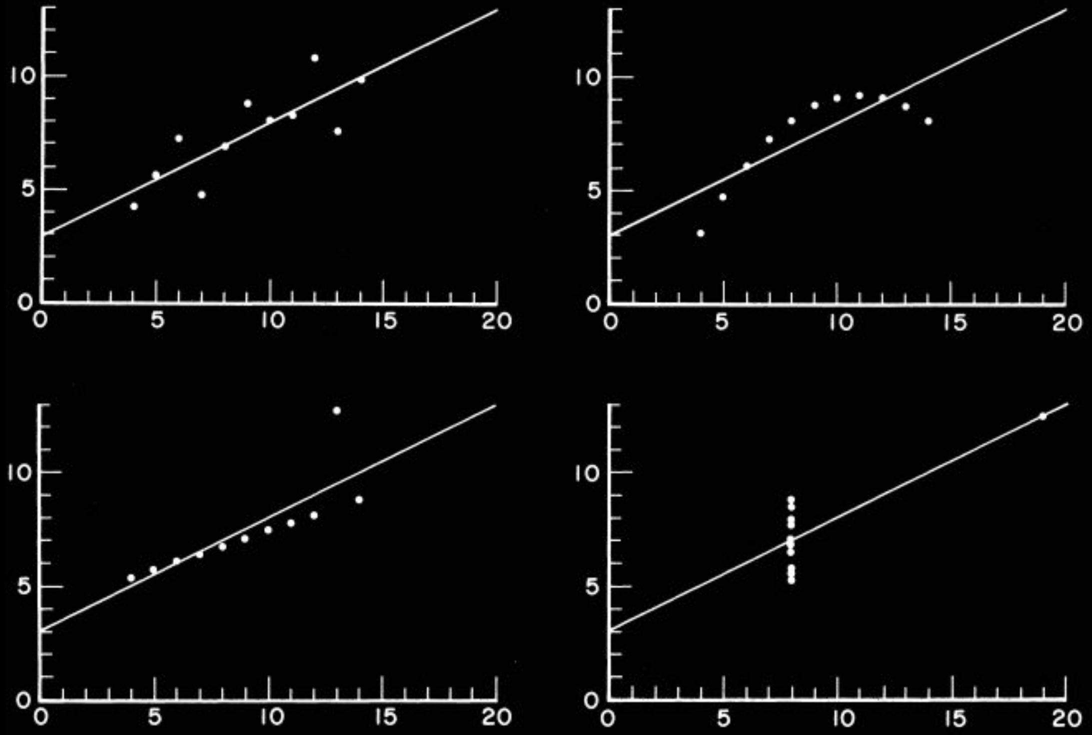
Állítás:

- $-1 \leq \mathrm{corr}(X, Y) \leq 1$
- Ha a korreláció +1, akkor $Y = aX + b$, ahol $a > 0$.
- Ha a korreláció -1, akkor $Y = aX + b$, ahol $a < 0$.

Példa (korábbi):

$$\mathrm{corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\mathbb{D}(X)\mathbb{D}(Y)} = \frac{-0{,}6}{\sqrt{9{,}2} \cdot \sqrt{0{,}6}} \approx -0{,}2554$$

Kitérő: Anscombe négyese



Forrás: ww.w.lithoguru.com/scientist/statistics/Anscombe_Graphs%20in%20Statistical%20Analysis_1973.pdf

Valószínűségi vektorváltozó

Definíció: Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ val. változók. Ekkor az

$$\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

függvényt *valószínűségi vektorváltozó*nak hívjuk.

Definíció: Az $\underline{X}$ val. vektorváltozó *(együttes) eloszlásfüggvény*e az

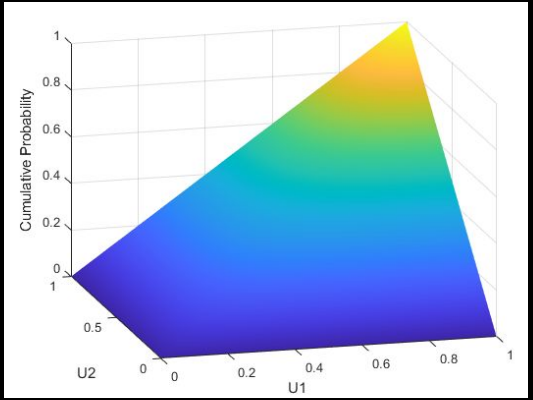
$$F_{\underline{X}} : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$$

$$F_{\underline{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n)$$

vektorváltozós, skalárértékű függvény.

Val. vektorváltozó, példa

Példa: Válasszunk egyenletesen véletlenszerűen egy pontot az egységnégyzetben. Jelölje (X, Y) a pont koordinátáit. Mi (X, Y) együttes eloszlásfüggvénye?



Forrás: www.mathworks.com/help/stats/copulas-generate-correlated-samples.html

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \mathbb{P}(X < x, Y < y) =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{ha } x > 1, y > 1 \\ x & \text{ha } 0 < x \leq 1, y > 1 \\ y & \text{ha } 0 < y \leq 1, x > 1 \\ xy & \text{ha } 0 < x, y \leq 1 \\ 0 & \text{egyébkent} \end{cases} = \max\left(0, \min(1, x)\right) \cdot \max\left(0, \min(1, y)\right)$$

Val. vektorváltozó, példa

Példa: Aladárral és Bélával csetelünk.

Ha nincs meccs: egymástól független, Exp(6) eloszlás szerint válaszolnak.

Ha meccs van: Aladár dupla annyi idő alatt reagál, Béla feleannyi idő alatt.

Annak az esélye, hogy ma meccs van: $\frac{1}{5}$

Kérdés: mi a válaszidők együttes eloszlásfüggvénye?

X : Aladár válaszideje

Y : Béla válaszideje

$M = \{\text{meccs van}\}$

$U, V \sim \mathrm{Exp}(6)$

$$Z = \begin{cases} 2 & \text{ha meccs van,} \\ 1 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$X = U \cdot Z \qquad Y = V/Z$$

Val. vektorváltozó, példa

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \mathbb{P}(X < x, Y < y) = \mathbb{P}(U \cdot Z < x, V/Z < y) =$$

$$= \mathbb{P}(U \cdot Z < x, V/Z < y \mid M)\mathbb{P}(M)$$
$$+\mathbb{P}(U \cdot Z < x, V/Z < y \mid \overline{M})\mathbb{P}(\overline{M})$$
$$= \mathbb{P}(U \cdot 2 < x, V/2 < y)\frac{1}{5} + \mathbb{P}(U < x, V < y)\frac{4}{5}$$
$$= \mathbb{P}(U < \frac{x}{2})\mathbb{P}(V < 2y)\frac{1}{5} + \mathbb{P}(U < x)\mathbb{P}(V < y)\frac{4}{5} \qquad (x, y > 0)$$
$$= (1 - e^{-6\frac{x}{2}})(1 - e^{-6 \cdot 2y})\frac{1}{5} + (1 - e^{-6x})(1 - e^{-6y})\frac{4}{5}$$

Együttes sűrűségfüggvény, def.

Definíció: Legyen $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ val. vektorváltozó. Egy

$$f_{\underline{X}} : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$$

függvény az $\underline{X}$ *(együttes) sűrűségfüggvénye*, ha

$$\int_{-\infty}^{x_n} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f_{\underline{X}}(z_1, \ldots, z_n)\mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_n = F_{\underline{X}}(x_1, \ldots, x_n)$$

tetszőleges $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ esetén.

Definíció: Az $\underline{X}$ val. vektorváltozót *folytonos*nak hívjuk, ha létezik együttes sűrűségfüggvénye.

Együttes sfv., valószínűségek

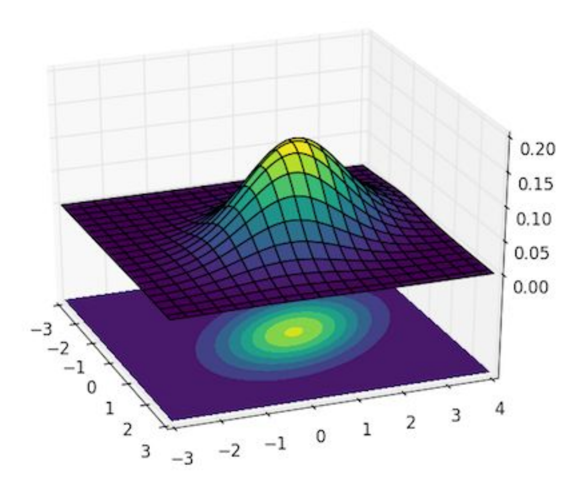
Állítás: Legyen $\underline{X}$ val. vektorváltozó, és $H \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető.

Ekkor

$$\mathbb{P}(\underline{X} \in H) = \int_H f_{\underline{X}}(\underline{x})\mathrm{d}\underline{x}$$

Megjegyzések:

- Jordan-mérhető $\sim$ van térfogata.
- Vesd össze: egy dimenziós állítás a $\mathbb{P}(a < X < b)$ mennyiségről.



Forrás: scipython.com/blog/visualizing-the-bivariate-gaussian-distribution/

Együttes sfv., meghatározás

Állítás: Legyen $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ val. vektorváltozó. Ha $\underline{X}$ folytonos, akkor az alábbi függvény a sűrűségfüggvénye lesz:

$$f_{\underline{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \partial_{x_1} \ldots \partial_{x_n} F_{\underline{X}}(x_1, \ldots, x_n) & \text{ha ez létezik,} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Megjegyzések:

- A deriválások sorrendje tetszőleges.
- Feltesszük, hogy létezik a sűrűségfüggvény (nem pedig következtetjük). Pl. ha $\underline{X} = (X_1, X_2)$ és $X_1 = X_2$ akkor $\underline{X}$ nem folytonos.

Együttes sfv., meghatározás

Példa: Mi az esélye, hogy Aladár előbb ír vissza, mint Béla?

$$F_{(X,Y)}(x,y) = (1-e^{-6\frac{x}{2}})(1-e^{-6\cdot 2y})\frac{1}{5} + (1-e^{-6x})(1-e^{-6y})\frac{4}{5}$$

$$(x, y > 0)$$

$$\partial_y F_{(X,Y)}(x,y) = (1-e^{-6\frac{x}{2}})12e^{-12y}\frac{1}{5} + (1-e^{-6x})6e^{-6y}\frac{4}{5}$$

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \partial_x \partial_y F_{(X,Y)}(x,y) =$$

$$= 3e^{-3x} \cdot 12e^{-12y}\frac{1}{5} + 6e^{-6x} \cdot 6e^{-6y}\frac{4}{5}$$

Együttes sfv., meghatározás

Példa: Mi az esélye, hogy Aladár előbb ír vissza, mint Béla?

$$f_{(X,Y)}(x,y) = 3e^{-3x} \cdot 12e^{-12y}\frac{1}{5} + 6e^{-6x} \cdot 6e^{-6y}\frac{4}{5} \qquad (x,y>0)$$

$$\mathbb{P}(X<Y) = \int_{\{x<y\}} f_{(X,Y)}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^y \left(3e^{-3x} \cdot 12e^{-12y}\frac{1}{5} + 6e^{-6x} \cdot 6e^{-6y}\frac{4}{5}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^\infty \left(\left[3e^{-3x}\right]_0^y \cdot 12e^{-12y}\frac{1}{5} + \left[6e^{-6x}\right]_0^y \cdot 6e^{-6y}\frac{4}{5}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0{,}44$$

Együttes sfv., karakterizáció

Állítás: Legyen $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$. Ekkor

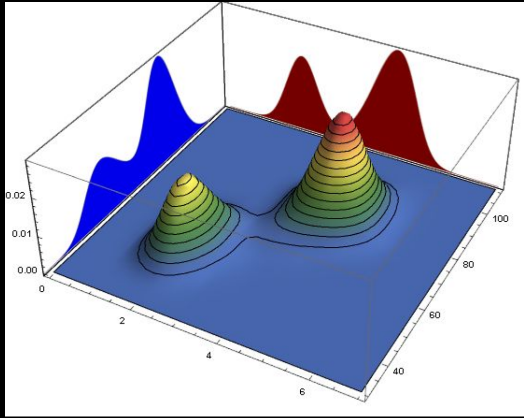
$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n)\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = 1$$

pontosan akkor teljesül, ha létezik $\underline{X}$ val. vektorváltozó, aminek sűrűségfüggvénye éppen f.

(Vesd össze: egy-változós sűrűségfüggvény karakterizáció.)

Marginális eloszlás, definíció

Definíció: Ha $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ val. vektorváltozó, akkor az X_i eloszlását az $\underline{X}$ i-edik *marginális eloszlás*ának (avagy peremeloszlásának) hívjuk.



Forrás: wolfram.com,
Visualize Marginal Distributions

Állítás: Ha $\underline{X}$ folytonos val. vektorváltozó, akkor X_i is folytonos, és a sűrűségfüggvénye:

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{i-1} \mathrm{d}x_{i+1} \ldots \mathrm{d}x_n$$

Marginális eloszlás, példa

Példa: Béla válaszidejének eloszlása,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{\infty} \left(3e^{-3x} \cdot 12e^{-12y}\frac{1}{5} + 6e^{-6x} \cdot 6e^{-6y}\frac{4}{5}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{12}{5}e^{-12y}\left[-e^{-3x}\right]_0^{\infty} + \frac{24}{5}e^{-6y}\left[-e^{-6x}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{12}{5}e^{-12y} + \frac{24}{5}e^{-6y}$$

Név: kevert exponenciális eloszlás

Val. változók együttes függetlensége

Definíció: Az $X_1, \ldots, X_n$ val. változók *(együttesen) függetlenek*, ha az

$$\{X_1 < x_1\}, \ldots, \{X_n < x_n\}$$

események függetlenek minden $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ esetén.

Megjegyzések:

- Példákat lásd még: két-változós, diszkrét esetnél.
- Tipikus példa: független kísérletek (számszerű) eredményei.
- Intuitívan "összefüggő" val. változókról is kiderülhet, hogy függetlenek.
- Ahogy események esetén is, függetlenek részhalmaza független.

Függetlenség, karakterizáció

Állítás: Az $X_1, \ldots, X_n$ val. változók pontosan akkor függetlenek, ha

$$F_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n)$$

tetszőleges $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ esetén.

Állítás: Az $X_1, \ldots, X_n$ folytonos val. változók pontosan akkor függetlenek, ha $(X_1, \ldots, X_n)$ folytonos val. vektorváltozó, és

$$f_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n)$$

tetszőleges $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ esetén.

Függetlenség, karakterizáció

Példa: Igaz-e, hogy Aladár válaszideje független Béla válaszidejétől?

$$f_{(X,Y)}(x,y) = 3e^{-3x} \cdot 12e^{-12y}\frac{1}{5} + 6e^{-6x} \cdot 6e^{-6y}\frac{4}{5}$$

$$f_X(x) = \frac{3}{5}e^{-3x} + \frac{24}{5}e^{-6x} \qquad f_Y(y) = \frac{12}{5}e^{-12y} + \frac{24}{5}e^{-6y}$$

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq 3e^{-3x} \cdot 12e^{-12y}\frac{1}{5} + 6e^{-6x} \cdot 6e^{-6y}\frac{4}{5}$$

Köszönöm a figyelmet!