Valószínűségszámítás

2021. október 20.

Mészáros Szabolcs

Tárgyhonlap:
cs.bme.hu/valszam

Exponenciális eloszlás

Definíció: Egy Z val. változó *exponenciális eloszlású* λ paraméterrel (ahol $\lambda > 0$ valós), ha

$$f_Z(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$F_Z(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Jelölés:

$$Z \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

Példák:

- Idei első áramszünet időpontja,
- Mikor hív már fel XY?
- Sűrű, egymás utáni “kísérletek” közül az első siker időpontja.

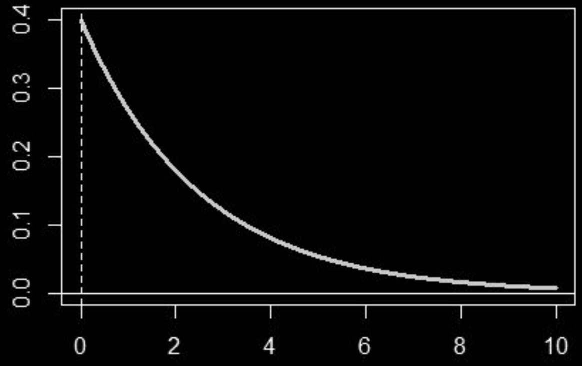
Exponenciális eloszlás

Ez valóban sűrűségfüggvény, hiszen

- nemnegatív
- integrálja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x =$$

$$\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = 0 + e^{-0} = 1$$



Exponenciális eloszlás, várható érték

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\mathrm{d}x =$$

$$= \left[x(-e^{-\lambda x})\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-\lambda x})\mathrm{d}x$$

$$= 0 + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = 0 - \frac{1}{-\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

Exponenciális eloszlás, példa

Feladat. (2019-es pótZH, 4.) Felfogadtunk egy kivitelezőt egy felújításhoz, aki a munkát csak később, $\mathrm{Exp}(\lambda)$ eloszlású idő múlva tudja elkezdeni. Maga a munka legalább 4, legfeljebb λ időegységig tart ($\lambda \geq 4$), de nem tudjuk pontosan meddig: a fenti két határ között bármilyen időtartam előfordulhat, egyenletes eloszlással. Mennyi λ értéke, ha várhatóan 10 időegység alatt készülünk el, a kezdeti várakozást is beleszámolva?

Kezdésig eltelt idő: $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ Munka ideje: $Y \sim U(4;\lambda)$

$$10 = \mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\lambda} + \frac{4+\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{248}}{2}$$ de $\lambda \geq 4$ ezért $\lambda \approx 15{,}87$

Örökifjúság

Definíció: Nevezzünk egy X val. változót *örökifjú*nak a $G \subseteq \mathbb{R}$ halmazon, ha tetszőleges $s, t \in G$ esetén

$$\mathbb{P}(X > t + s \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

illetve $\mathbb{P}(X \in G) = 1.$

Tipikus kérdések:

- Tessék? “Akár várok már s ideje, akár most kezdtem várni, annak a valószínűsége, hogy még több, mint t ideig kell várnom, ugyanaz.”
- Van-e ilyen valószínűségi változó? Az G-től függ.

Örökifjúság, biz.

Állítás: Legyen X nem-konstans örökifjú val. változó a G halmazon.

1. Ha $G = \{1, 2, 3, \dots\}$, akkor X eloszlása geometriai.
2. Ha $G = [0, \infty)$, akkor X eloszlása exponenciális.

Bizonyítás: Az örökifjúság feltétele ekvivalensen,

$$\mathbb{P}(X > t + s) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(X > s) \qquad (\forall s, t \in G)$$

Örökifjúság, biz. 1

1. eset: $G = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Rögzítsünk egy t pozitív egészt, és jelölje $p = \mathbb{P}(X = 1)$

$$\mathbb{P}(X > t+1) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(X > 1) =$$

$$= \mathbb{P}(X > t) \cdot (1-p) = \ldots = (1-p)^{t+1}$$

Ebből már kiszámolhatjuk az eloszlást:

$$\mathbb{P}(X = t) = \mathbb{P}(X > t-1) - \mathbb{P}(X > t) =$$

$$= (1-p)^{t-1} - (1-p)^{t} = p(1-p)^{t-1}$$

Örökifjúság, biz. 2

2. eset: $G = [0, \infty)$

Jelölés: $g(t) = \ln \mathbb{P}(X > t)$ minden pozitív valós t-re.

Tetszőleges $s, t \in [0, \infty)$ esetén

$$g(t+s) = \ln \mathbb{P}(X > t+s) =$$

$$= \ln \mathbb{P}(X > t) + \ln \mathbb{P}(X > s) = g(t) + g(s)$$

Ebből és g definíciójából kihozható, hogy valamilyen pozitív λ értékre

$$g(t) = -\lambda t \quad (\forall t > 0) \quad \Rightarrow \quad P(X > t) = e^{-\lambda t}$$

Exponenciális egész része

Állítás: Legyen $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Ekkor $\lceil X \rceil \sim \mathrm{Geo}(1-e^{-\lambda})$.

Bizonyítás: Legyen $k > 0$ egész.

$$\mathbb{P}\big(\lceil X \rceil = k\big) = \mathbb{P}(k-1 < X \leq k) =$$

$$= F_X(k) - F_X(k-1) = (1-e^{-\lambda k}) - (1-e^{-\lambda(k-1)})$$

$$= e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} = e^{-\lambda(k-1)}(1-e^{-\lambda}) = (1-p)^{k-1}p$$

Val. változók függetlensége

Definíció: Legyenek X és Y val. változók ugyanazon az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ eseménytéren. Ezek *függetlenek*, ha minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\{X < x\} \text{ és } \{Y < y\}$$

független események.

Megjegyzések:

- Eml.: $\mathbb{P}\big(\{X < x\} \cap \{Y < y\}\big) = \mathbb{P}(X < x)\mathbb{P}(Y < y)$
- Értelmezés: a változók által meghatározott események függetlenek.
- Miért nem $\{X = x\}$ és $\{Y = y\}$? Hogy folytonosra is működjön.

Val. változók függetlensége

Példák:

1) X egy kockadobás eredménye, Y a ma leeső csapadék mennyisége.

2) $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 11, 12\}$

   X a szám hármas maradék, Y a négyes maradéka

3) Tegyük fel, hogy egy telefonközpontba egy nap N hívás érkezik, ahol $N \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$. Az egyes hívások egymástól függetlenül p valószínűséggel gép által indított hívások. Jelölje X a gép által indított hívások számát, Y pedig az többi hívást.

Val. változók függetlensége

Állítás: Az X és Y diszkrét valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha minden $x \in \mathrm{Ran}(X)$ és $y \in \mathrm{Ran}(Y)$ esetén

$$\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

Használata:

- Cáfolni vele a függetlenséget: könnyű. Elég egy x-y párt találni.
- Ellenőrizni a függetlenséget: számolós. Minden párra le kell ellenőrizni.

Biz ötlete: $\{X < x\}$ felbontható $\{X = x'\}$ alakú események diszjunkt uniójára.

Szorzat várható értéke, állítás

Állítás: Ha X és Y független valószínűségi változók, és léteznek az $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ és $\mathbb{E}(XY)$ várható értékek, akkor

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Megjegyzés:

- A val. változók nem feltétlenül diszkrétek.
- Függetlenség nélkül ez nem igaz, pl. X értéke azonos eséllyel 1 vagy -1.
- A fenti egyenlet nem elég a függetlenséghez.
  (De ha $\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$
  minden f, g nemnegatív valós függvényre, abból következik.)

Szorzat várható értéke, indikátor

Lemma: Legyenek A és B független események. Ekkor

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A)\mathbb{E}(\mathbf{1}_B)$$

Biz:

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A\cap B}) = \mathbb{P}(A \cap B) =$$

$$= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A)\mathbb{E}(\mathbf{1}_B)$$

Kérdés: miért segít ez az általánosabb esetben?

Mert az egyszerű val. változók felbonthatók indikátorok összegére.

$$X = \sum_{k \in \mathrm{Ran}(X)} k \cdot \mathbf{1}_{\{X=k\}} \qquad Y = \sum_{l \in \mathrm{Ran}(Y)} l \cdot \mathbf{1}_{\{Y=l\}}$$

Szorzat várható értéke

Biz.:

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}\left(\sum_{k\in\mathrm{Ran}(X)} k\cdot\mathbf{1}_{\{X=k\}} \sum_{l\in\mathrm{Ran}(Y)} l\cdot\mathbf{1}_{\{Y=l\}}\right) =$$

$$= \sum_{k\in\mathrm{Ran}(X)} \sum_{l\in\mathrm{Ran}(Y)} k\cdot l\cdot\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{X=k\}}\mathbf{1}_{\{Y=l\}}\right)$$

$$= \sum_{k\in\mathrm{Ran}(X)} \sum_{l\in\mathrm{Ran}(Y)} k\cdot l\cdot\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{X=k\}}\right)\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{Y=l\}}\right)$$

$$= \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Diszkrét együttes eloszlás, példa

Kérdés: A fent használt $\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = l\})$ valószínűségeket, nem lehetne valahogy koncepciózusan, “együtt kezelni”?

Példa: $\mathrm{Ran}(X) = \{2, 3, 5\}$ $\mathrm{Ran}(Y) = \{0, 1, 2\}$

$Y \backslash X$	2	3	5	
0	0,05	0,15	0,1	0,3
1	0,1	0,2	0,1	0,4
2	0,05	0,2	0,05	0,3
	0,2	0,55	0,25	

$$\mathbb{P}(X = 5) \cdot \mathbb{P}(Y = 0) = 0{,}075$$

$$\mathbb{P}(X = 5,\ Y = 0) = 0{,}1$$

Kérdések: Független-e X és Y? Mennyi $\mathbb{E}(XY)$?

Diszkrét együttes eloszlás, def.

Definíció: Legyenek X és Y egyszerű valószínűségi változók.

- *Együttes eloszlásuk:*

$$\mathbb{P}(X = k, Y = l) \quad (k \in \mathrm{Ran}(X), l \in \mathrm{Ran}(Y))$$

- *Marginális eloszlások:* az X és Y eloszlása külön-külön.

Marginális kiszámolása:

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{l \in \mathrm{Ran}(Y)} \mathbb{P}(X = k,\ Y = l)$$

Diszkrét együttes eloszlás, példa

Példa (folytatás): Ha X és Y függetlenek lettek volna, akkor $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Mit csináljunk amikor ez nem teljesül?

Ötlet: XY is csak egy szokásos val. változó, használhatjuk a definíciót.

$$\mathrm{Ran}(XY) = \{k \cdot l \mid k \in \mathrm{Ran}(X),\ l \in \mathrm{Ran}(Y)\}$$

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{m \in \mathrm{Ran}(XY)} m \cdot \mathbb{P}\Bigg(\bigcup_{\substack{k \in \mathrm{Ran}(X) \\ l \in \mathrm{Ran}(Y) \\ k \cdot l = m}} \{X = k,\ Y = l\} \Bigg) =$$

$$= \sum_{k \in \mathrm{Ran}(X)} \sum_{l \in \mathrm{Ran}(Y)} k \cdot l \cdot \mathbb{P}(X = k,\ Y = l) =$$

Diszkrét együttes eloszlás, példa

$$\begin{aligned} &= 0 \cdot 0{,}05 + 0 \cdot 0{,}15 + 0 \cdot 0{,}1 \\ &\quad +2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}1 \\ &\quad +4 \cdot 0{,}05 + 6 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}05 \\ &= 3{,}2 \end{aligned}$$

$Y \backslash X$	2	3	5	
0	0,05	0,15	0,1	0,3
1	0,1	0,2	0,1	0,4
2	0,05	0,2	0,05	0,3
	0,2	0,55	0,25	

Megjegyzés: A val. változók nem-függetlensége azzal is megmutatható, hogy

$$\mathbb{E}(XY) \neq \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Kovariancia, motiváció

Kérdés: hogyan mérjük a függetlenséget / nem függetlenséget?

	Nagysága	**Viszony mérése**
Esemény	valószínűség	feltételes valószínűség
Valószínűségi változó	várható érték	???

- Feltételes várható érték?

  Igen, de csak később.

- Kovariancia.

Kovariancia, definíció

Definíció: Az X és Y valószínűségi változók *kovarianciá*ja:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)\big)$$

A továbbiakban mindig feltesszük, hogy $\operatorname{cov}(X,Y)$ létezik.

Állítás:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Bizonyítás: $\mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)\big) =$

$$= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X)Y\Big) - \mathbb{E}\Big(X\mathbb{E}(Y)\Big) + \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\Big) =$$

Kovariancia, tulajdonságok

Biz. (folytatás): $\mathrm{cov}(X, Y) = \ldots$

$$= \mathbb{E}(XY) + (-1 - 1 + 1)\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

$$= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Következmény:

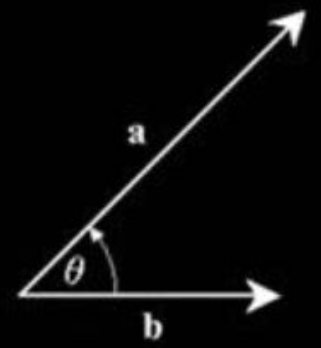
1. Ha valamelyikük konstans, akkor a kovariancia nulla.
2. Ha függetlenek, akkor a kovariancia nulla.
3. Attól, hogy a kovariancia nulla, még nem feltétlenül lesznek függetlenek.

Kovariancia, példa

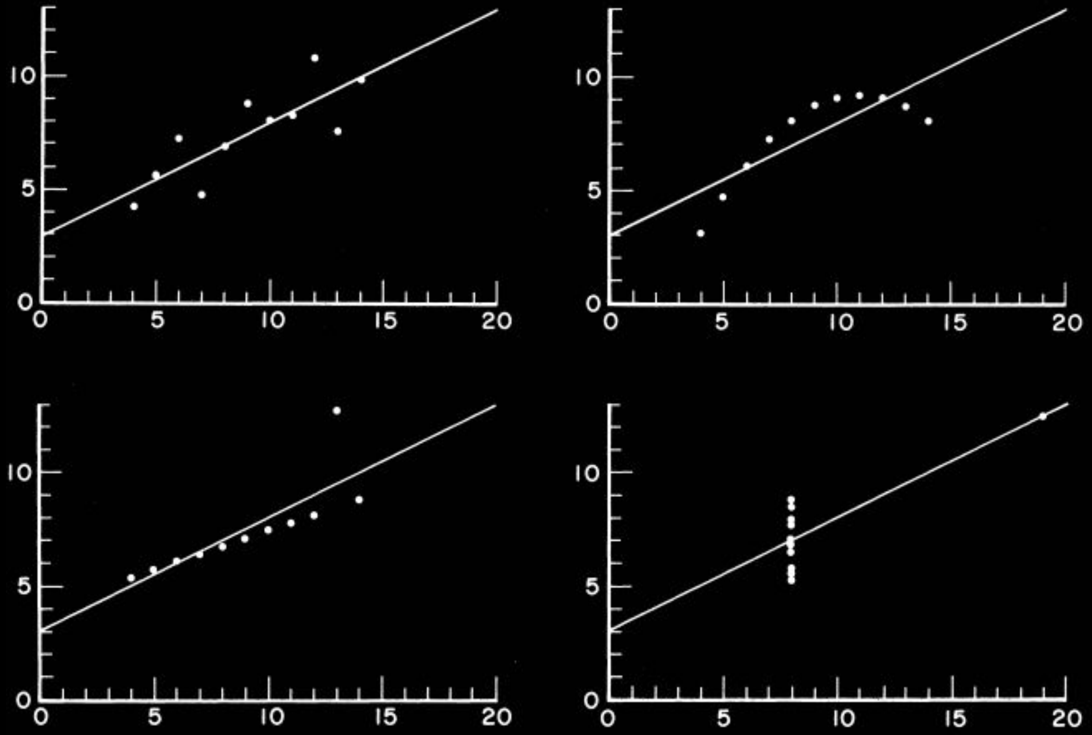
Példa (folytatás):

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) =$$
$$= 3{,}2 - 3{,}8 \cdot 1 = -0{,}6$$

Geometriai kép:
A kovariancia hasonlóan működik a skaláris szorzathoz.
A merőlegesség szerepét, a *“korrelálatlanság”* veszi át, azaz amikor a kovariancia 0 (ami a függetlenségnél gyengébb feltétel).



Kitérő: Anscombe négyese



Forrás: ww.w.lithoguru.com/scientist/statistics/Anscombe_Graphs%20in%20Statistical%20Analysis_1973.pdf

Köszönöm a figyelmet!