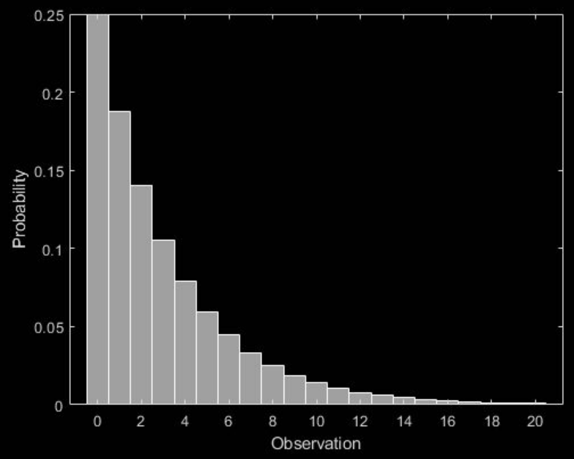
Valószínűségszámítás

2021. október 06.

Mészáros Szabolcs

Tárgyhonlap:
cs.bme.hu/valszam

Ism.: Geometriai eloszlás



Példák:

- Cérnát próbálunk befűzni, hányadszorra sikerül.
- Addig jár a korsó a kútra…
- Független kísérletek, első siker sorszáma.

Definíció: Az X val. változó *geometriai eloszlású* p paraméterrel (ahol $0 < p < 1$), ha

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p \qquad (\forall k = 1, 2, \dots)$$

Jelölés: $X \sim \mathrm{Geo}(p)$

Geometriai eloszlás

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p = p \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty}(1-p)^{\ell} =$$

geometriai sor összege

$$= p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

Geometriai eloszlás, várható érték

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} p =$$

$$= p \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} (1-p)^{k-1} = p \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} (1-p)^{k-1}$$

$$= p \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1-p)^{i-1}}{1-(1-p)} = \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^{j} = \frac{1}{p}$$

Poisson-eloszlás, definíció

Definíció: Az X val. változó *Poisson-eloszlás*ú λ paraméterrel (ahol $\lambda > 0$), ha

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad (\forall k = 0, 1, 2, \dots)$$

Jelölés: $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$

Példák:

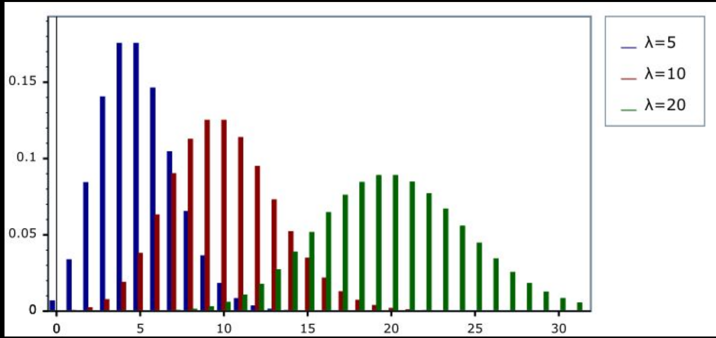
- Adott órában születő gyerekek száma.
- Szerverre beérkező request-ek száma adott időintervallumban.
- Általában: rengeteg kis valószínűségű, egymástól független eseményből hány következik be.

Poisson-eloszlás, várható érték

Ez tényleg eloszlás:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= e^{\lambda - \lambda} = 1$$



Várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \lambda$$

Poisson-eloszlás, példa

Feladat: Egy kaszkadőr egy évben átlagosan kétszer sérül meg. Mi a valószínűsége, hogy idén éppen négyszer?

Sérülések száma: Y

Kérdés: $\mathbb{P}(Y = 4) = ?$

Feltesszük, hogy $Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$

Tudjuk, hogy $2 = \mathbb{E}(Y) = \lambda$

$$\mathbb{P}(Y = 4) = \frac{2^4}{4!}e^{-2} = \frac{2}{3}e^{-2} \approx 0{,}0902$$

Poisson-approximáció

Állítás: Legyen n pozitív egész, $\lambda \in (0, \infty)$, és jelölje $p_n = \dfrac{\lambda}{n}$-et.
Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (\forall k = 0, 1, 2, \dots)$$

Megjegyzések:

- Ha $X \sim B\left(n; \dfrac{\lambda}{n}\right)$ ahol n “nagy”, de λ nem, akkor X kb. Poisson.
- Határeloszlás-tétel: egy eloszlásokból álló sorozat “határértékének” leírása.

Poisson-approximáció

Bizonyítás: legyen k és n rögzített.

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!n^k}}_{\to 1} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} \qquad n \to \infty$$

Poisson-eloszlás, példa

Példa: Tegyük fel, hogy egy magyarérettségiben kétszer akkora eséllyel van összesen 3 elírás, mint 1 elírás. Tegyük fel, hogy a hibák egymástól függetlenül, azonos eséllyel következnek be. Közelítőleg mekkora a valószínűsége, hogy egyáltalán nincs elírás a dolgozatban?

Hibák száma: X Kérdés: $\mathbb{P}(X = 0) = ?$

Közelítőleg: $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$

$$2 = \frac{\mathbb{P}(X = 3)}{\mathbb{P}(X = 1)} = \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} \Big/ \frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^2}{6} \Rightarrow \lambda = 2\sqrt{3}$$

$$\dots \Rightarrow \mathbb{P}(X = 0) = e^{-2\sqrt{3}}$$

Transzformált várható értéke

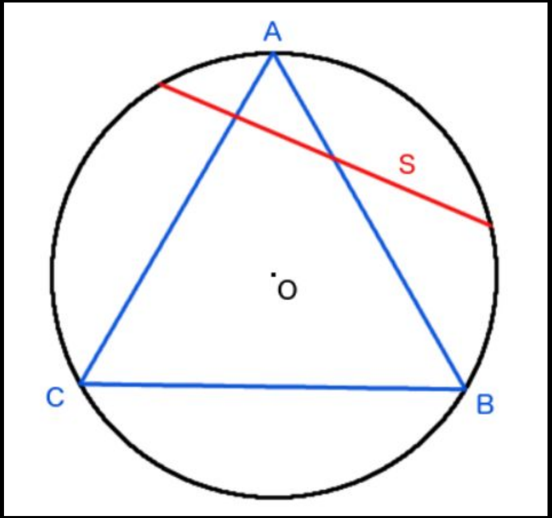
Tétel: Legyen X egyszerű val. változó, és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(g(X))$ létezik. Ekkor

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{j=1}^{\infty} g(k_j) \cdot \mathbb{P}(X = k_j)$$

ahol $\mathrm{Ran}(X) = \{k_1, k_2, \dots\}$

Bertrand-paradoxon

Feladvány: Válasszuk ki egy kör egy húrját véletlenszerűen. Mi a valószínűsége, hogy a húr hosszabb, mint a körbe írható szabályos háromszög egy oldala?



a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{4}$

d) egyik sem

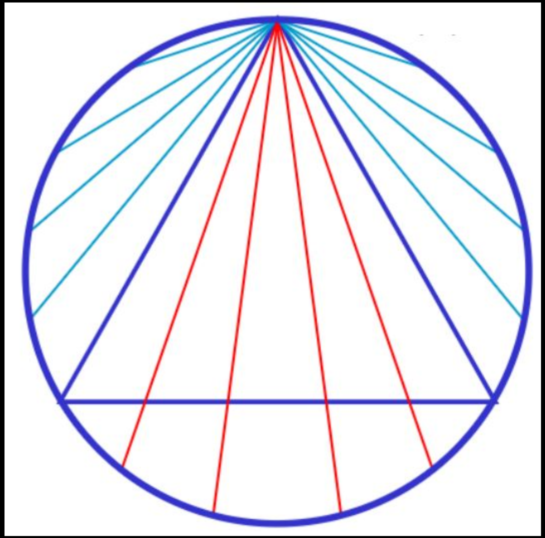
Bertrand-paradoxon, v1

Egyenletesen véletlenszerűen választunk:

1. a körvonalon P pontot, aztán
2. a körvonalon Q pontot.

Vegyük a PQ húrt.

Válasz: $\frac{1}{3}$



Magyarázat: rajzoljuk be a P csúcsú szabályos háromszöget. Kedvező eset: ha Q a háromszög másik két csúcsa közti körívre esik.

Bertrand-paradoxon, v2

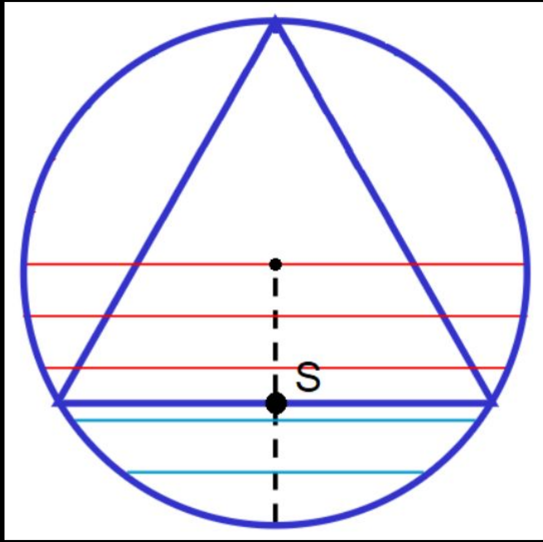
Egyenletesen véletlenszerűen választunk:

1. a körvonalon P pontot, aztán
2. a PO sugáron S pontot.

Vegyük a PO-ra vett merőleges húrt S-ben.

Válasz: $\frac{1}{2}$

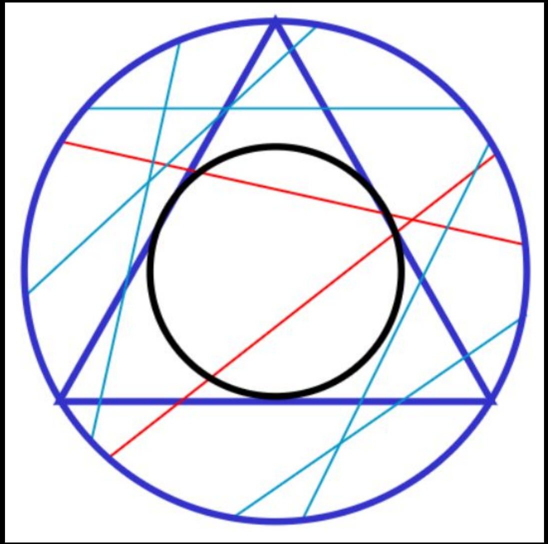
Magyarázat: rajzoljuk be a P-vel átellenes csúcsú szabályos háromszöget. Kedvező eset: ha S a háromszögön belül van.



Bertrand-paradoxon, v3

Egyenletesen véletlenszerűen választunk:

1. a kör**lapon** P pontot.



Vegyük azt a húrt, aminek felezőpontja P.

Válasz: $\frac{1}{4}$

Magyarázat: rajzoljunk be egy tetszőleges szabályos háromszöget, és beírható körét. A kis kör sugara fele a nagy kör sugarának.
Kedvező eset: ha P a körön belül van.

$$\left(\frac{r}{2}\right)^2\pi \Big/ r^2\pi = \frac{1}{4}$$

Bertrand-paradoxon, eloszlásfüggvény

Kérdés: Mi a húr hosszának eloszlásfüggvénye, mondjuk az 1. módszernél?

$$F_X(x) = \mathbb{P}(\text{húr} < x) =$$

$$\frac{2 \cdot |\{\alpha \in [0, \pi] \mid \alpha \text{ kp.-i szögű húr} < x\}|}{2\pi}$$

Számláló (koszinusz-tétellel):

$$\sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \cdot \cos(\alpha)} < x \iff \alpha < \arccos\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi}\arccos\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$$

Folytonos eset, példa

Példa: darts nyilat dobunk egy asztali földgömbre, nyaralási célt keresve.

Valószínűségi változók:

- X: Távolság légvonalban
- Y: Távolság autóval
- S: Célország zászlajában a színek száma
- T: Idő odajutni

Melyik a kakukktojás?

Az S diszkrét. Az összes többire $\mathbb{P}(X = x) = 0 \quad (\forall x)$

Nulla valószínűség

- Eseményeknél: lehetetlen $\neq$ nulla valószínűség
  ("Na hát aztán?")
- Legyen X val. változó. "Eloszlása" (eddigi fogalmainkat használva) a $\mathbb{P}(X = x) = 0$ számokból áll, vagyis nem szolgál információval.
- Y a távolság autóval, T az odajutási idő.

$$A = \{Y = y\} \qquad \mathbb{P}(T < 5 \text{ óra} \mid A) =?$$

Intuitíven értelmes, formálisan értelmetlen.

(Lásd még: Borel--Kolmogorov paradoxon)

Egyenletesen véletlen

“Válasszunk egyenletesen véletlenszerűen egy pontot a $[0, 1]$ intervallumból.” Mit lehet mondani egy ilyen X val. változóról?

$$\mathbb{P}(X \leq t) = t \qquad \text{ha } t \in [0, 1]$$

Az egyes értékek helyett az intervallumba esés valószínűségét nézzük.

- *Nem elég az, hogy 0 és 1 közé esik? Az is leírja, hogy milyen.*
- Nem.
- *De miért?*
- Lásd következő dia.

Nem-egyenletesen véletlen

Legyen X egyenletesen véletlen a $[0, 1]$-en,
és legyen $Y = X^2$.

$$\mathbb{P}\left(Y \leq \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(X^2 \leq \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq X \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$\mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq \frac{1}{2}$$

Vagyis Y más eloszlású, mint X.

Köszönöm a figyelmet!