Valószínűségszámítás

2021. szeptember 22.

Mészáros Szabolcs

Tárgyhonlap:
cs.bme.hu/valszam

Valószínűségi mező, példák

1. **Klasszikus, véges**
   Pl. kártyahúzás
2. **Véges**
   Pl. melyik felével esik le a vajaskenyér
3. **Megszámlálhatóan végtelen**
   Pl. egy könyv lehetséges címe
4. **Geometriai**
   Pl. véletlenszerű pont az egységnégyzetben
5. **Egyéb**
   Pl. Béla mennyit késik a valszám előadásról
   (pozitív eséllyel lehet 0 vagy 90 perc is)

Függetlenség

Állandó feltétel: Adott egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező.

Emlékeztető: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Definíció: Az A és B események függetlenek, ha

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Példa:

$$A = \{\text{első dobás hatos}\} \qquad \mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$$

$$B = \{\text{a két dobás megegyezik}\} \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{6}$$

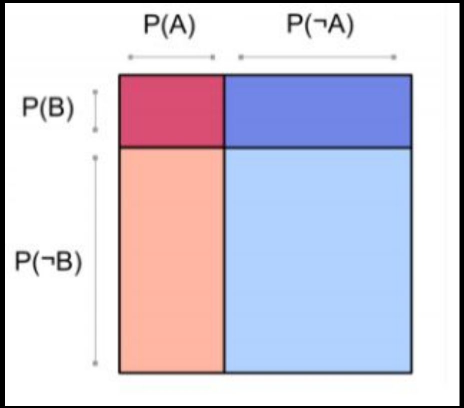
$$A \cap B = \{\text{mindkét dobás hatos}\} \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

Függetlenség, példa

Példa: Vizuálisan, A és B független,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3} \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{12}$$



Állítás: Ha A és B független, akkor A és $\overline{B}$ is független.

Bizonyítás: $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) =$

$$= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\big(1 - \mathbb{P}(B)\big)$$

$$= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B})$$

Együttes függetlenség, motiv.

Setup: $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ események.

~~**Definíció:** A fenti események függetlenek, ha~~

$$\cancel{\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)}$$

Mi van, ha $A_1 = \emptyset$?

~~**Definíció:** A fenti események függetlenek, ha~~

$$\cancel{\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(A_j) \quad (\forall 1 \leq i < j \leq n)}$$

Mi van, ha

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$?

Együttes függetlenség, def.

Setup: $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ események.

Definíció: A fenti események függetlenek, ha

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \quad (\forall I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\})$$

Példák:

- egymás után kifogott halak közül melyik ponty, melyik nem,
- (külön generált) véletlen számok közül melyik nagyobb mint 0,5,
- általánosan, független kísérletek esetében adott események bekövetkezése.

Együttes függetlenség, ellenpélda

Példa: 2 szabályos érmét feldobunk.

$$A_1 = \{1.\ \text{dobás fej}\} \qquad A_2 = \{2.\ \text{dobás fej}\}$$

$$A_3 = \{\text{azonos eredmény}\}$$

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{1}{4} \qquad \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j) = \frac{1}{4} \qquad (i \neq j)$$

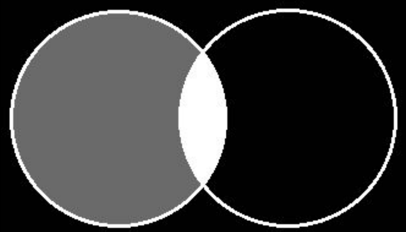
$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(\{\text{két fej}\}) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \text{nem független}$$

Feltételes valószínűség

Definíció: Legyenek A és B események, és $\mathbb{P}(A) > 0$.

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$



Kiolvasva: B feltételes valószínűsége A-ra.

Megjegyzés: A és B pontosan akkor függetlenek, ha

$\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$. (Feltéve, hogy a bal oldal értelmes.)

Feltételes valószínűség, példa

1. Béla dob a szerencse-dodekaéderével (1-től oldalszámig van számozva). Legyen $A = \{\text{párosat dob}\}$. Határozzuk meg az alábbiakat:

$$\mathbb{P}(\{6\} \mid A) = \frac{1}{6} \qquad \mathbb{P}(\{3\text{-nál nagyobb}\} \mid A) = \frac{5}{6}$$

$$\mathbb{P}(\{3\text{-mal osztható}\} \mid A) = \frac{2}{6}$$

2. Hogy kerül elő feltételes valószínűség egy feladatban?

$$A = \{\text{felkészülök}\} \qquad B = \{\text{átmegyek}\}$$

$$\mathbb{P}(B \mid A) = 0{,}99$$

Feltételes valószínűség, tul.

Állítás: Legyen A olyan esemény, amire $\mathbb{P}(A) > 0$.
Ekkor az alábbi $\mathcal{F} \to [0, 1]$ függvény valószínűségi mérték Ω-n:

$$B \mapsto \mathbb{P}(B \mid A)$$

Megjegyzés: Emiatt a korábbi állítások $\mathbb{P}(\,.\,)$ helyett $\mathbb{P}(\,.\, | A)$ -val is igazak.

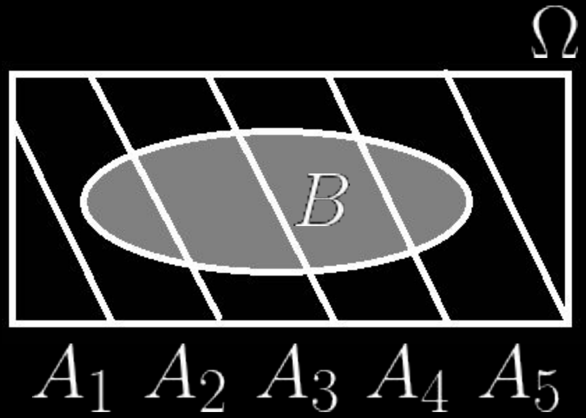
Teljes valószínűség tétele

Tétel: Legyenek $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ páronként kizáró események,

azaz $A_i \cap A_j = \emptyset \quad (\forall i \neq j)$. Tegyük fel, hogy $\bigcup_i A_i = \Omega$

és $\mathbb{P}(A_i) > 0 \quad (\forall i)$. Ekkor

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)$$



Definíció: teljes eseményrendszer: ahogy fent.

Teljes vszg. tétele, biz.

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap \Omega) =$$

$$= \mathbb{P}\left(B \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{P}(B \cap A_i)}{\mathbb{P}(A_i)} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

Monty Hall-paradoxon

Adott három ajtó. Egyik mögött autó, kettő mögött kecske van.

1. lépés: választunk egy ajtót,
2. lépés: kinyitnak egy olyat, ami mögött kecske van,
3. lépés: újra választhatunk.

Kérdés: mi a jó taktika?

Monty Hall-paradoxon, levezetés

$$\mathbb{P}(\text{autó}) = \mathbb{P}(\text{autó}|\text{elsőre kecske})\mathbb{P}(\text{elsőre kecske})$$

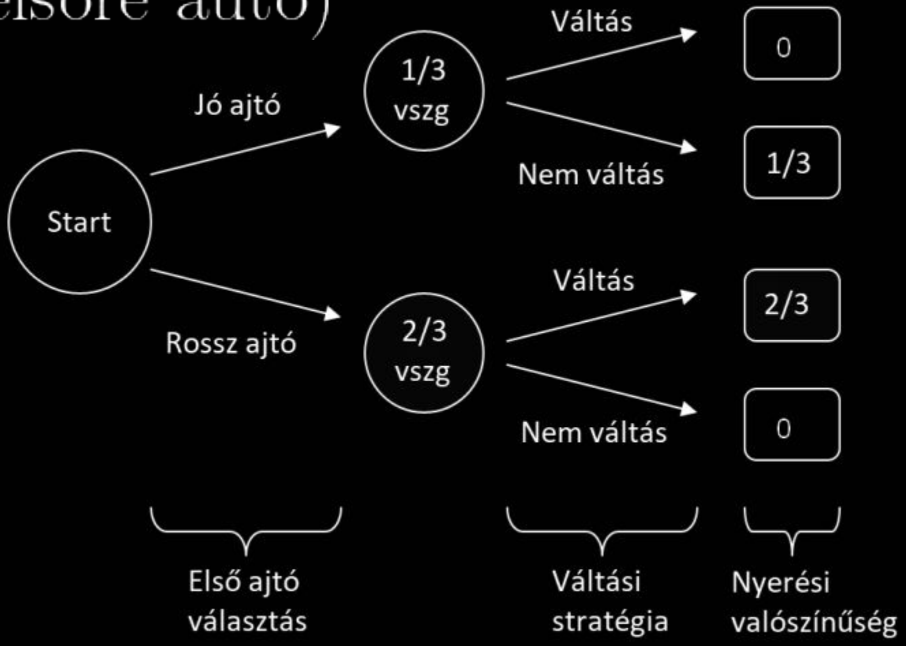
$$+\mathbb{P}(\text{autó}|\text{elsőre autó})\mathbb{P}(\text{elsőre autó})$$

a) ha nem váltunk:

$$= 0 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

b) ha váltunk:

$$= 1 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$



Szorzási szabály, példa

Adott egy 52 lapos kártyapakli. Húzunk 3 lapot (visszatevés nélkül). Mi az esélye, hogy elsőre királyt, másodikra dámát, harmadikra bubit húzunk?

$$\mathbb{P}(K_1 \cap D_2 \cap B_3) =$$

$$= \mathbb{P}(K_1) \cdot \mathbb{P}(D_2 \mid K_1) \cdot \mathbb{P}(B_3 \mid D_2 \cap K_1)$$

$$= \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} \cdot \frac{4}{50} = \frac{8}{16575} \approx 0{,}0005$$

Szorzási szabály

Állítás: Legyenek $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ események, amire $\mathbb{P}(A_i) > 0 \quad (\forall i)$. Ekkor

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \dots \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

$$= \mathbb{P}(A_1) \prod_{i=2}^{n} \mathbb{P}\Big(A_i \mid \bigcap_{j<i} A_j\Big)$$

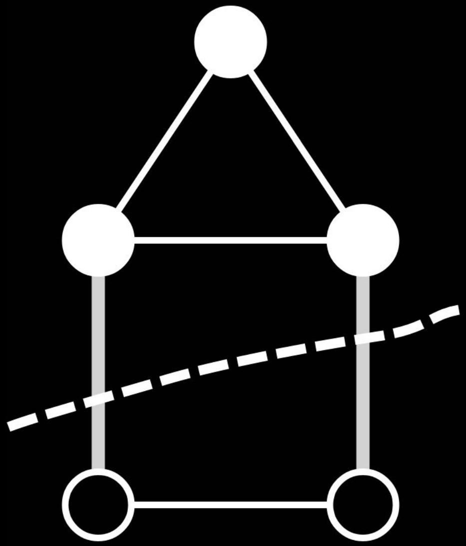
Karger algoritmus, probléma

Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, amiben

- hurokél nincs, de
- többszörös él lehet.

Keresünk: globális minimális (elemszámú) vágást.

Vagyis olyan $F \subseteq V$ amire F és $V \setminus F$ közt a legkevesebb él fut.



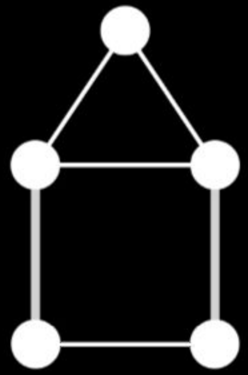
Karger algoritmus, lépések

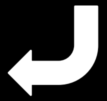
Ötlet: véletlen algoritmus

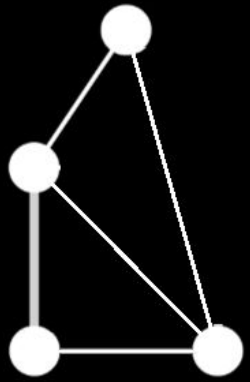
1. lépés: válasszunk egyenletesen véletlenszerűen egy élet;
2. lépés: húzzuk össze a két végét egy csúcsba;
3. lépés: dobjuk el a hurokéleket (de a többszörös éleket ne).

Ezt iteráljuk, amíg két csúcs nem marad.

Az eredmény épp egy vágás(nak felel meg).







Karger algoritmus, állítás

Állítás: $\mathbb{P}(\text{megtaláljuk az optimálisat}) \geq \dfrac{2}{n^2}$

Természetes kérdés: “A $\frac{2}{n^2}$ az nem nagyon kicsi?”

Biz: Legyen F egy minimális vágás.

$$A_i = \{i.\ \text{választott él nem } F\text{-beli}\}$$

$$\mathbb{P}(\text{m.o.}) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \dots \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Karger algoritmus, biz.

$$\mathbb{P}(A_i \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{i-1})$$

$$= 1 - \frac{|F|}{|\text{élek száma } i. \text{ választás előtt}|}$$

$$\geq 1 - \frac{k}{\frac{1}{2}k(n-(i-1))} \quad \text{ahol } k = |F| \text{ és } n = |V|$$

$$= 1 - \frac{2}{n-i+1} \Rightarrow \text{calc} \ldots \text{calc} \ldots \text{calc} \ldots \Rightarrow \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) \geq \frac{2}{n^2}$$

Bayes-paradoxon

Lásd még: 3Blue1Brown youtube-csatorna / Bayes theorem

Feladat: Tegyük fel, hogy

- átlagosan 10 000-ből 1 sofőr ittas;
- ha ittas, a szonda 95% eséllyel jelez;
- ha józan, a szonda 0.1% eséllyel jelez.

Ha bejelzett a szonda, mekkora az esélye, hogy a sofőr valójában józan?

[Ezek nem valós adatok.]

(Egyszerű) Bayes-tétel

Tétel: Legyenek A és B pozitív valószínűségű események. Ekkor

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Biz:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Bayes-tétel

Tétel: Legyenek $B, A_1, A_2, \ldots, A_n$ pozitív valószínűségű események. Tegyük fel, hogy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ teljes eseményrendszer (lásd 12. dia). Ekkor

$$\mathbb{P}(A_1 \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_1)\mathbb{P}(A_1)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)}$$

Biz: az egyszerű Bayes-tétel miatt

$$\mathbb{P}(A_1 \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_1)\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(B)}$$

de a teljes valószínűség tétele miatt

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

Bayes-paradoxon, megoldás

$$A_1 = \{\text{józan}\} \qquad \mathbb{P}(B \mid A_1) = 0{,}001 \qquad \mathbb{P}(A_1) = 0{,}9999$$

$$A_2 = \{\text{ittas}\} \qquad \mathbb{P}(B \mid A_2) = 0{,}95 \qquad \mathbb{P}(A_2) = 0{,}0001$$

$$B = \{\text{jelzett}\} \qquad \mathbb{P}(B) = ?$$

$$\mathbb{P}(A_1 \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_1)\mathbb{P}(A_1)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)}$$

$$= \frac{0{,}001 \cdot 0{,}9999}{0{,}001 \cdot 0{,}9999 + 0{,}95 \cdot 0{,}0001} \approx 0{,}9132$$

Köszönöm a figyelmet!