Valószínűségszámítás

2021. december 1.

Mészáros Szabolcs

Tárgyhonlap:
cs.bme.hu/valszam

Teljes várható érték tétele, folytonos eset

Állítás: Legyen X folytonos val. változó, sűrűségfüggvénye f_X.

Ha $\mathbb{E}(Y)$ véges, akkor

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(Y \mid X = x) f_X(x) \mathrm{d}x$$

Példa: Válasszunk egyenletesen véletlenszerűen egy X számot 0 és 1 között, majd válasszunk egyenletesen véletlenszerűen egy Y számot X^2 és X között. Mennyi Y várható értéke?

Teljes várható érték tétele, folytonos eset

Mivel az Y “feltételes eloszlása” egyenletes az $[X^2, X]$ intervallumon, ezért

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \begin{cases} \frac{1}{x-x^2} & \text{ha } x^2 < y < x \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(Y \mid X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{Y|X}(y \mid x)\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{2(x-x^2)}\right]_{x^2}^{x} = \frac{x+x^2}{2}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(Y \mid X = x) f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x+x^2}{2}\mathrm{d}x = \frac{5}{12}$$

Teljes valószínűség tétele

Kérdés: Ha a teljes várható érték tételének van több alakja, akkor a teljes valószínűség tételének is van?

Emlékeztető: (teljes eseményrendszerre)

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)$$

Köv.: X diszkrét val. változó, B esemény

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k \in S_X} \mathbb{P}(B \mid X = k) \cdot \mathbb{P}(X = k)$$

Megj.: folytonos esetben az utóbbi értelmetlen

Teljes valószínűség tétele

Def.: Legyen X val. változó, A esemény. Ekkor A-nak az X-re vett *feltételes valószínűsége* az

$$x \mapsto \mathbb{E}(\mathbf{1}_A \mid X = x)$$

regressziós függvény. Jelölése: $\mathbb{P}(A \mid X = x)$

Tétel: *(Teljes valószínűség tétele)* Legyen X folytonos val. változó (sfv.: f_X). Ekkor tetszőleges A eseményre:

$$\mathbb{P}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(A \mid X = x) f_X(x) \mathrm{d}x$$

Teljes valószínűség tétele

Példa: X: valszám vizsgára szánt felkészülési idő.

$$X \sim U(\varepsilon; 20) \qquad 0 < \varepsilon \leq 20$$

x felkészülési idő esetén az ötös érdemjegy valószínűsége $\left(\frac{x}{21}\right)^2$

Mekkora eséllyel lehet ötöst kapni?

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{20-\varepsilon} & \text{ha } \varepsilon \leq x \leq 20 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \qquad \mathbb{P}(A \mid X = x) = \left(\frac{x}{21}\right)^2$$

Teljes valószínűség tétele

Példa (folyt.):

$$\mathbb{P}(A) = \int_{\varepsilon}^{20} \left(\frac{x}{21}\right)^2 \frac{1}{20-\varepsilon} \mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3 \cdot 21^2 (20-\varepsilon)}\right]_{\varepsilon}^{20} = \frac{\varepsilon^2 + 20\varepsilon + 20^2}{3 \cdot 21^2}$$

$\varepsilon = 1$ esetén ez 0,3182

Többdimenziós binomiális eloszlás

Kérdés: Hogyan általánosítható a binomiális eloszlás többdimenziós esetre?

Ötlet: legyenek $X_1, \dots, X_m$ együttesen függetlenek, ahol minden i-re $X_i \sim B(n; p_i)$ valamilyen $0 < p_i < 1$ számokra.

Milyen problémát modellez ez? n kísérlet m-féle, független értelemben lehet sikeres vagy sikertelen? Ez nem túl realisztikus model.

Többdimenziós binomiális eloszlás

Példa: szabályos dobókocka, címkéi: 1 db 1-es, 2 db 2-es, 3 db 3-as. 13-szor dobunk. Mi a valószínűsége, hogy 3 db 1-est, 4 db 2-est és 6 db 3-ast látunk?

$$X_i : i \text{ értékű dobások száma}$$

Klasszikus valószínűség:

$$\mathbb{P}(X_1 = 3, X_2 = 4, X_3 = 6) = \\ = \frac{13!}{3!4!6!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^6 \approx 0{,}05364$$

Többdimenziós binomiális eloszlás

Def.: Az $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_m)$ val. vektorváltozó *polinomiális* (avagy *multinomiális*) eloszlású, $n \in \mathbb{N}$ és $(p_1, p_2, \ldots, p_m) \in [0,1]^m$ paraméterekkel, ha $p_1 + \ldots + p_m = 1$ és

$$\mathbb{P}(X_1 = k_1, \ldots, X_m = k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!} p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$$

minden $0 \leq k_i \leq n \quad (i = 1, \ldots, m) \;\; k_1 + \ldots + k_m = n$ esetén.

Megj.:

- A peremeloszlások binomiális eloszlásúak.
- A koordináták nem függetlenek.
- A peremeloszlások nem határozzák meg az együttes eloszlást.

Többdimenziós exponenciális eloszlás

Def.: Legyenek Y_1, Y_2, Y_3 együttesen független val. változók, ahol $Y_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda_i) \quad (i = 1, 2, 3)$. Definiáljuk az $\underline{X} = (X_1, X_2)$ vektorváltozót: $X_1 = \min(Y_1, Y_3)$ és $X_2 = \min(Y_2, Y_3)$.

Az $\underline{X}$ eloszlását Marshall–Olkin-féle kétváltozós exponenciális eloszlásnak hívják.

Megj.:

- A peremeloszlások exponenciálisak.
- A koordináták nem függetlenek.
- Ez nem folytonos eloszlás (együttes sfv értelemben), és nem is diszkrét.

Többdimenziós exponenciális eloszlás

Motiváció: örökifjú tulajdonság többdimenziós esetben?

Ötlet: $\mathbb{P}(\underline{X} > \underline{t} + \underline{s} \mid \underline{X} > \underline{s}) = \mathbb{P}(\underline{X} > \underline{t}) \qquad \forall \underline{t}, \underline{s} \in [0, \infty)^2$

Ekkor $\underline{X}$ koordinátái együttesen függetlenek és exponenciális eloszlásúak.

Másik ötlet: $\mathbb{P}(\underline{X} > t \cdot \underline{1} + \underline{s} \mid \underline{X} > \underline{s}) = \mathbb{P}(\underline{X} > t \cdot \underline{1})$

ahol $\underline{1} = (1, 1)$ $\qquad \forall t \geq 0 \quad \forall \underline{s} \in [0, \infty)^2$

Többdimenziós exponenciális eloszlás

Példa: Egy gépben két fontos alkatrész van. Élettartamukat jelölje X_1, X_2. Tegyük fel, hogy az alkatrészek kora (s_1 és s_2) nem befolyásolja, hogy t idő alatt elromlik-e valamelyikük, vagyis

$$\mathbb{P}\big((X_1, X_2) > (t+s_1, t+s_2) \mid (X_1, X_2) > (s_1, s_2)\big) =$$

$$= \mathbb{P}\big((X_1, X_2) > (t, t)\big)$$

Ekkor (X_1, X_2) lehet Marshall–Olkin eloszlású is, valamilyen λ_1, λ_2 paraméterekre.

Többdimenziós normális eloszlás

Kérdés: Hogyan általánosítható a normális eloszlás többdimenziós esetre?

Modellezenedő jelenség: (X, Y) mérési eredmény.

Mit várunk egy ilyen (X, Y)-tól?

1. folytonos (létezik $f_{X,Y}$ együttes sűrűségfüggvény)
2. forgásszimmetrikus $f_{X,Y}(x, y) = h(x^2 + y^2)$
3. a koordináták függetlenek

$$h : [0, \infty) \to [0, \infty)$$

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Többdimenziós normális eloszlás

Állítás: Ha egy (X, Y) val. vektorváltozó teljesíti az előző három feltételt, akkor

$$f_{X,Y}(x, y) = e^{a(x^2+y^2)-c}$$

valamilyen $a, c \in \mathbb{R}$, ahol $a < 0$.

Megj.:

- Ha a adott, akkor c kiszámolható, mert a sűrűségfüggvény integrálja 1.
- Gyenge feltételek, mégis csak "egyféle" ilyen eloszlás van.
- Nem hivatkozunk az egy-dimenziós normális eloszlásra.
- 2-nél több dimenzió esetén ugyanez igaz (ha megfelelően definiáljuk a forgásszimmetriát).

Többdimenziós normális eloszlás

Biz.: $$h(x^2+0^2) = f_{X,Y}(x,0) = f_X(x)\cdot f_Y(0)$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{f_Y(0)}h(x^2) \qquad f_Y(y) = \frac{1}{f_X(0)}h(y^2)$$

$$h(x^2+y^2) = f_X(x)\cdot f_Y(y) = \frac{1}{f_Y(0)}h(x^2)\cdot\frac{1}{f_X(0)}h(y^2)$$

$$u = x^2 \qquad \ln h(u+v) = \ln h(u) + \ln h(v) - c$$

$$v = y^2 \qquad \Rightarrow \ln h(u) = au - c \quad (a\in\mathbb{R})$$

$$c = \ln\left(f_X(0)f_Y(0)\right) \qquad \Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = e^{a(x^2+y^2)-c}$$

Standard normális eloszlás

Def.: Az $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ val. vektorváltozó n-dimenziós *standard normális eloszlás*ú, ha folytonos, és együttes sűrűségfüggvénye:

$$f_{\underline{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

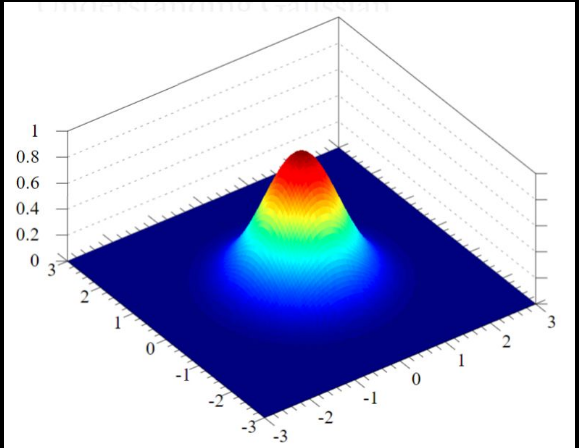
Megj.:

- az előző állítás jelölésével: $a = -\frac{1}{2} \quad c = \frac{n}{2}\ln(2\pi)$
- $n = 1$ esetén 1-dim standard normális
- a koordináták függetlenek (hiszen a sűrűségfüggvény szorzattá bomlik)

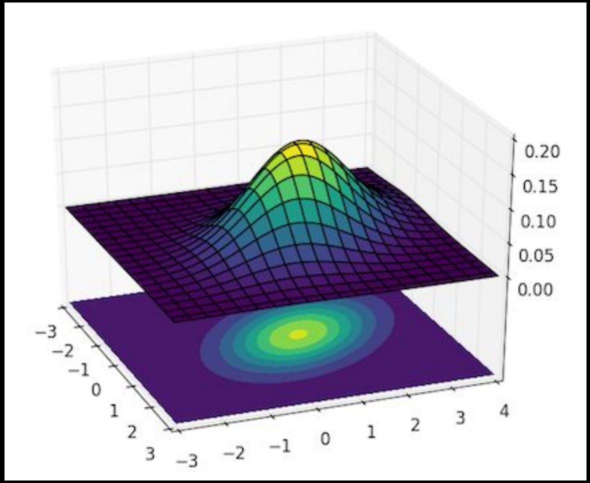
Kérdés: Hogyan kapjuk a nem standard n-dim normális eloszlásokat?
Itt is várható érték és "szórásnégyzet" paraméterezi őket?

Vizualizálás

Standard normális



Nem-standard normális



Kovarianciamátrix

Ismétlés:

$$\mathrm{cov}(\underline{X}) = \begin{pmatrix} \mathrm{cov}(X_1, X_1) & \mathrm{cov}(X_1, X_2) & \dots & \mathrm{cov}(X_1, X_n) \\ \mathrm{cov}(X_2, X_1) & \mathrm{cov}(X_2, X_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathrm{cov}(X_n, X_1) & \dots & & \mathrm{cov}(X_n, X_n) \end{pmatrix}$$

Def.: Az $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ val. vektorváltozó *várható érték vektora*:

$$(\mathbb{E}X_1, \dots, \mathbb{E}X_n)$$

Jelölés: $\mathbb{E}\underline{X}$

Többdimenziós normális eloszlás

Alternatív kovarianciamátrix definíció:

$$\mathrm{cov}(\underline{Y}) = \mathbb{E}\left((\underline{Y} - \mathbb{E}\underline{Y}) \cdot (\underline{Y} - \mathbb{E}\underline{Y})^T\right)$$

Def.: Az $\underline{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ val. vektorváltozó többdimenziós *normális eloszlás*ú, ha

$$\underline{Y} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{X} + \underline{\mu}$$

valamilyen $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\underline{\mu} \in \mathbb{R}^n$ és $\underline{X}$ n-dimenziós standard normális eloszlású val. vektorváltozó esetén.

Az eloszlást *nemelfajuló*nak hívjuk, ha $\det(\underline{\underline{A}}) \neq 0$.

Kérdés: Mi köze ennek a definíciónak a kovarianciamátrixhoz?

Többdimenziós normális eloszlás

Állítás: Legyen $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ standard normális eloszlású val. vektorváltozó, és $\underline{Y} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{X} + \underline{\mu}$. Ekkor

$$\mathbb{E}\underline{Y} = \underline{\mu} \qquad \operatorname{cov}(\underline{Y}) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^T$$

Állítás: Legyen $\underline{Y}$ nemelfajuló n-dimenziós normális eloszlású vektorváltozó, aminek várható érték vektora $\underline{\mu}$, kovarianciamátrixa $\underline{\underline{\Sigma}}$. Ekkor $\underline{Y}$ sűrűségfüggvénye

$$f_{\underline{Y}}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \det(\underline{\underline{\Sigma}})^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu})^T \underline{\underline{\Sigma}}^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu})}$$

Jelölés: $\underline{Y} \sim N\left(\underline{\mu}, \underline{\underline{\Sigma}}\right)$

Többdimenziós normális eloszlás

Kérdés: Ez mit jelent kétdimenziós esetben?

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$a = \mathbb{D}^2(Y_1)$$
$$b = \mathrm{cov}(Y_1, Y_2)$$
$$c = \mathbb{D}^2(Y_2)$$

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{-1} = \frac{1}{\det\left(\underline{\underline{\Sigma}}\right)} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\underline{\underline{\Sigma}}\right) = ac - b^2$$

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{ac - b^2}} e^{-\frac{1}{2(ac-b^2)}(cx^2+ay^2-2bxy))}$$

Többdimenziós normális eloszlás, példa

Legyen $\underline{X}$ kétdimenziós standard normális eloszlású val. változó, és

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & v \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{gathered} \underline{Y} = (Y_1, Y_2) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{X} \\ \operatorname{corr}(Y_1, Y_2) = 0{,}5 \end{gathered}$$

valamilyen $v \in \mathbb{R}$ számra. Mennyi v?

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^T = \begin{bmatrix} v^2 + 4 & 3v \\ 3v & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}^2(Y_1) & \operatorname{cov}(Y_1, Y_2) \\ \operatorname{cov}(Y_2, Y_1) & \mathbb{D}^2(Y_2) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 0{,}5 = \operatorname{corr}(Y_1, Y_2) = \frac{3v}{\sqrt{v^2 + 4} \cdot \sqrt{9}} \qquad \Rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Többdimenziós normális eloszlás

Állítás: Ha $\underline{Y} \sim N(\underline{\mu}, \underline{\underline{\Sigma}})$ akkor $Y_i \sim N(\mu_i, \Sigma_{i,i})$.

Megj.:

- Ezért is jogos a többdimenziós normális név.
- A kovarianciamátrix diagonálisa elemei a koordináták szórásnégyzetei.

Köv.: Legyen $(Y_1, Y_2) \sim N(\underline{\mu}, \underline{\underline{\Sigma}})$. Ekkor

1. $c_1 Y_1 + c_2 Y_2$ egydimenziós normális eloszlású (vagy konstans),
2. ha $\operatorname{corr}(Y_1, Y_2) = 0$, akkor Y_1 és Y_2 függetlenek.
3. az $\mathbb{E}(Y_2 \mid Y_1)$ regresszió megegyezik az Y_2-nek az Y_1-re vett lineáris regressziójával.

Köszönöm a figyelmet!