Valószínűségszámítás

2021. szeptember 8.

Mészáros Szabolcs

Tárgyhonlap:
cs.bme.hu/valszam

Információk

Honlap: **cs.bme.hu/valszam/**

Segédanyagok:

- Előadásjegyzet
- Diasorok
- Könyvek / egyéb jegyzetek:
  - Ketskeméty László - Valószínűségszámítás jegyzet
  - Vetier András - Valószínűségszámítás I-IV.
  - Mitzenmacher, Upfal - Probability and Computing

Számonkérés

ZH

- Írásbeli, 6 feladat, 90 perc
- első 5 + ⅓ gyakorlat anyagából
- max 20 pont/feladat
- aláírás feltétele: legalább 40p
- pótZH-n javítani is lehet
  (de rontani is, kivéve 40p alá)
- ZH: okt 26, kedd, 8:00-10:00
- pótZH: nov 23, kedd, 8:00-10:00

A fentiek a jelenléti számonkérésre vonatkoznak.

Vizsga

- Írásbeli, 6 feladat, 100 perc
- minden ea és gyak anyagából
- max 20 pont/feladat
- minimum pontszám: 40p
- egy feladat tétel+def (de biz. nem)
- szóbeli javítási lehetőség (+/-1 jegy)

Összpont: $$0{,}4 \cdot \min(\text{ZHpont}, 100) + 0{,}6 \cdot \min(\text{Vizsgapont}, 100)$$

Alsó ponthatárok: 40, 55, 70, 85

Bevezető

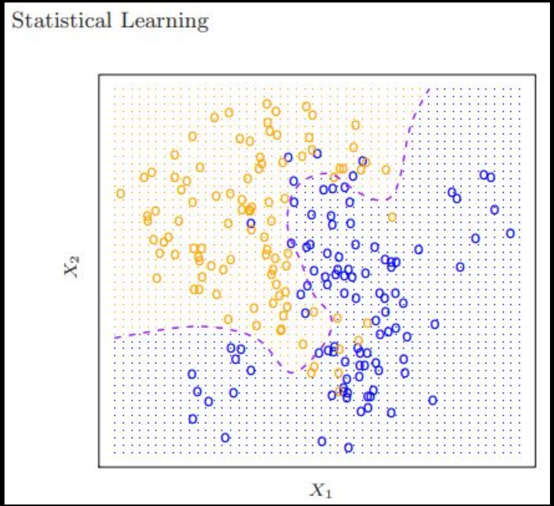
Alkalmazási területek:

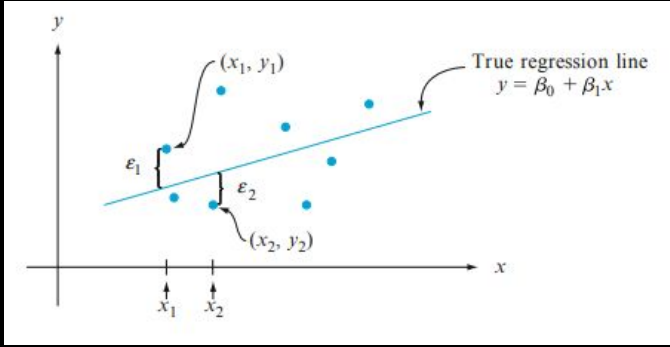
1. Ahol alapból van véletlen:
    - Műszaki témák
    - Tömegkiszolgálás
    - Statisztikai tanulás
2. Ahova viszünk véletlent:
    - Véletlen algoritmusok
        - Las Vegas
        - Monte Carlo
    - Kriptográfia

Egyéb “irodalom” (youtube):

- PBS Infinite Series
- Crash Course Stat.
- MIT OpenCourse

Könyv: James, Witten, et al., Intro to Statistical Learning





Bertrand-féle doboz paradoxon

Adott három egyforma doboz. A tartalmuk:

1. két arany érme,
2. két ezüst érme,
3. egy arany és egy ezüst érme.

Egyenletesen véletlenszerűen kihúzunk egy érmét. Feltéve, hogy ez arany, mi az esélye, hogy a dobozban lévő másik érme is arany?

a) 1/3 b) 1/2 c) 2/3

Bertrand-féle doboz paradoxon

Összes: **2** Kedvező: **1**

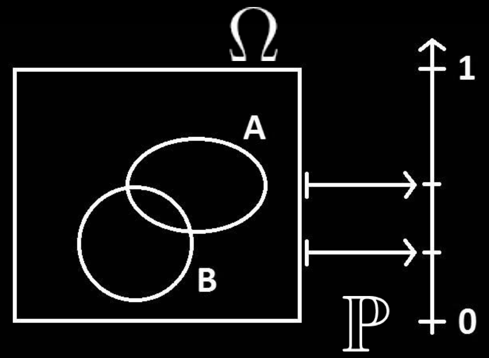
Valószínűség: **1/2**

HELYETT:

Összes: **3** Kedvező: **2**

Valószínűség: **2/3**

Fogalmak



Ω
- Eseménytér: akármilyen halmaz

$\omega \in \Omega$
- Kimenetel: az eseménytér elemei

$A \subseteq \Omega$
- Esemény: az eseménytér bizonyos részhalmazai

$\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$
- Valószínűség: egy-egy eseményhez 0 és 1 közötti valós számot rendelő függvény.

Példák

1. kockadobás (egy kockával egyszer):

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{\text{párosat dobunk}\} = \{2, 4, 6\}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$$

2. 6 érmés példa, egyet kihúzunk, feltesszük, hogy az arany.

$$\Omega = \{\text{három arany érme}\}$$

$$A = \{\text{az első dobozból}\}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}$$

3. Apgar score:

$$\Omega = \{0, 1, 2\}^5 \quad A = \{\text{összeg} \geq 4\} \quad \mathbb{P}(A) = ?$$

Bizonyos részhalmazok?

Mi az, hogy az események az omega “bizonyos részhalmazai”?

Nem minden részhalmaz lesz esemény. Csak amiket kijelölünk.

Oké, de miért?

- Elméleti ellentmondások elkerülése (lásd nem-mérhető halmazok)
- A megfigyelhetőség fogalma így modellezhető.
- Véletlen folyamatoknál hasznos feature

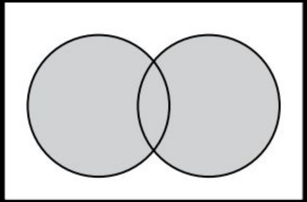
És hogyan “jelöljük ki” őket? Erre később visszatérünk.

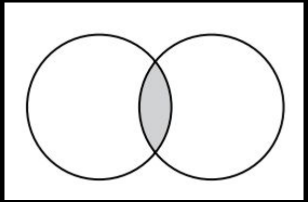
Műveletek eseményekkel

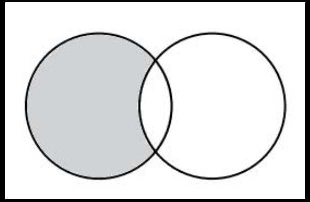
Jelölés/elnevezés:

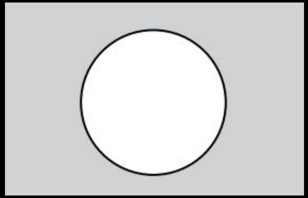
Legyenek A és B események. Ekkor

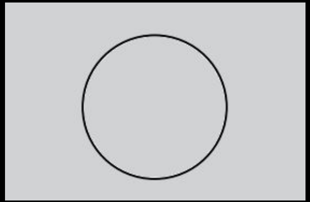
- $A \cup B$ a két esemény uniója
- $A \cap B$ a két esemény metszete
- $A \setminus B$ a két esemény különbsége
- $\overline{A}$ az A esemény komplementere
- Ω a biztos esemény
- $\emptyset$ a lehetetlen esemény

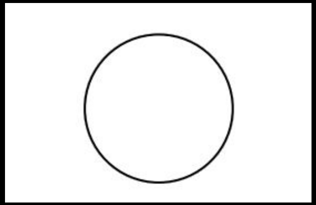












Műveletek eseményekkel

Tulajdonságok:

- $\overline{\overline{A}} = A$
- $A \cup \overline{A} = \Omega$
- $\cancel{A \cup \overline{B} = \overline{A} \cap B}$
- $A \cap B = B \cap A$
- stb.

Állítás: (De Morgan)

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

illetve végtelen sok eseményre:

- $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$

Műveletek eseményekkel, példa

Legyenek A, B, C események.

Fejezzük ki:

a) legalább egy esemény teljesül, $A \cup B \cup C$

b) A és B teljesül, de C nem, $(A \cap B) \setminus C$

c) minden esemény teljesül, $A \cap B \cap C$

d) egyik esemény sem teljesül, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

e) pontosan egy esemény teljesül. $(A \cup B \cup C) \setminus ((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C))$

Azt mondtuk, hogy az eseményeket nekünk kell kijelölni. Honnan tudjuk, hogy események uniója is esemény?

Eseményalgebra

Legyen Ω rögzített.

Jelölés: Ω összes részhalmazainak halmaza $\mathcal{P}(\Omega)$

Definíció: Egy $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ **szigma-algebra** (avagy ***σ***-algebra), ha

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$
- $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

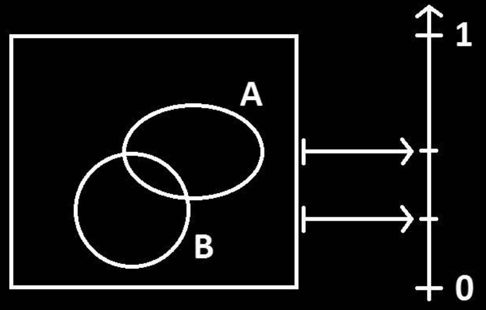
Eseményalgebra tulajdonságai

Állítás: Legyen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ szigma-algebra. Ekkor

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{F}$
- $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Valószínűségi mérték

Definíció: Legyen $\mathcal{F} \subseteq \Omega$ szigma-algebra.



Egy $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ függvény

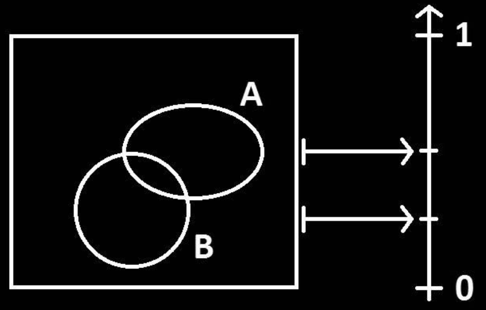
valószínűségi mérték, ha

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}, A_i \cap A_j = \emptyset (\forall i \neq j)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

(szigma-additív)

Valószínűségi mező



Definíció: Kolmogorov-féle valószínűségi mező:

Egy olyan $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ hármas, amire

- Ω tetszőleges halmaz,
- $\mathcal{F} \subseteq \Omega$ szigma-algebra, és
- $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ valószínűségi mérték.

Megjegyzés: itt választjuk ki az eseményeket.

Klasszikus valószínűségi mező, példa

Feladat: Vegyünk egyenletesen véletlenszerűen egy egyszerű irányítatlan gráfot az $\{a, b, c, d\}$ négyelemű csúcshalmazon.

Melyiknek nagyobb az esélye: hogy a gráf fagráf, vagy hogy legfeljebb két éle van?

Megoldás: 6 lehetséges él, 2^6 = 64 lehetséges gráf (ez az eseménytér).

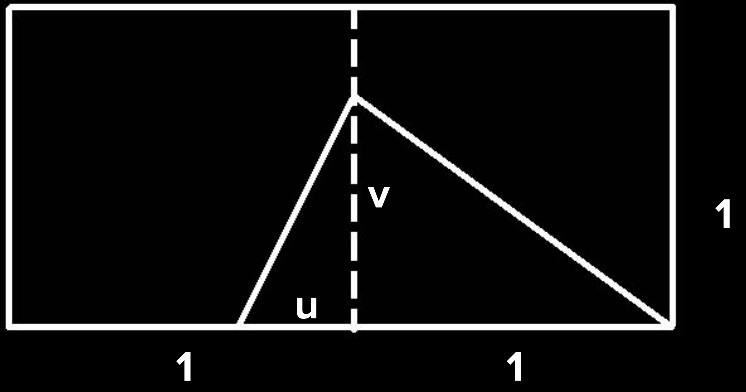
Fagráf: Pontosan 3 éle van, öf., de nincs benne kör. $\binom{6}{3} - 4 = 16$

Legfeljebb két éle van: $\binom{6}{2} + \binom{6}{1} + \binom{6}{0} = 22$

Valószínűség: $\frac{16}{64} < \frac{22}{64}$

Geometriai valószínűségi mező, példa

Feladat (2020, pótZH): Tekintsük a síkon az ábrán látható téglalapot, és a benne lévő háromszöget (ahol $0 < u, v \leq 1$). Válasszunk egyenletesen véletlenszerűen egy pontot a téglalapban. Jelölje A azt az eseményt, hogy a pont a téglalap jobb felére esik, és B azt az eseményt, hogy a pont a fenti háromszögbe esik. Mennyi u értéke, ha $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$?



$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{v/2}{2}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{T_{\text{kedvező}}}{T_{\text{összes}}} = \frac{((1+u)v)/2}{2} \quad \Rightarrow u = 1$$

Geometriai valószínűségi mező

Ω

- Valószínűségi mező:

  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ vagy $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (vagy $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$)

  aminek véges a hossza / területe / n-dimenziós térfogata.

$\omega \in \Omega$

- Kimenetel: az Ω egy pontja

$A \subseteq \Omega$

- Esemény: részhalmaz, aminek van hossza / területe / ...

$\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$

- Valószínűség: $\frac{T_{\text{kedvező}}}{T_{\text{összes}}}$ ahol a $T_{\text{kedvező}}$ az eseményhez tartozó hossz / terület / ..., és $T_{\text{összes}}$ az Ω hossza / területe / ...

Valószínűség alaptulajdonságai

Állítás: Legyenek $A, B \in \mathcal{F}$ tetszőleges események. Ekkor

- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1$
- $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A)$
- $B \subseteq A \Rightarrow \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$

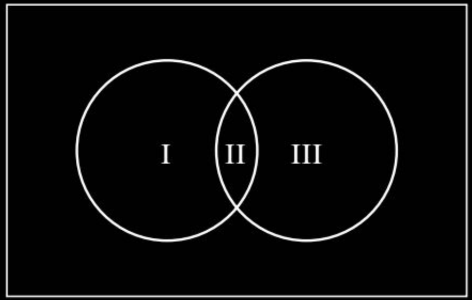
Poincaré-formula

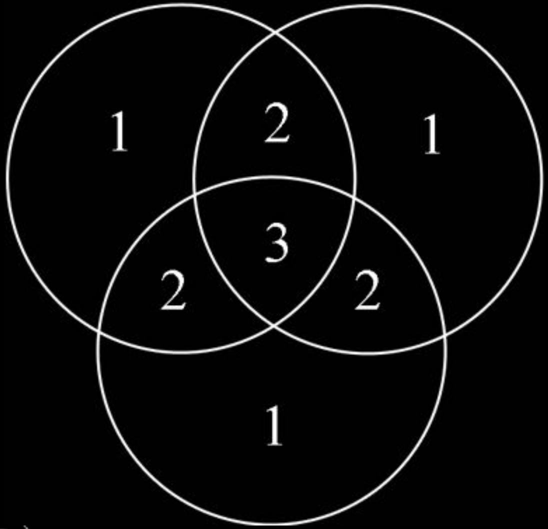
Kérdés: $A, B, C \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = ?$$

Egyszerűbb kérdés:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = ?$$





Egyszerűbb válasz:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Válasz: $$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$$
$$-\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C)$$
$$+\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

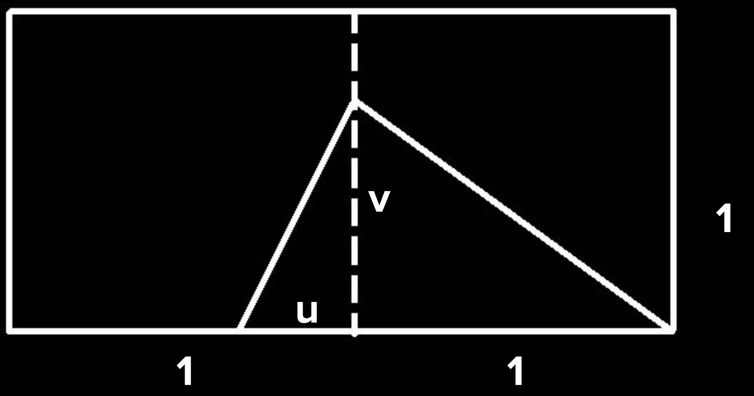
Poincaré-formula példa

Feladat: nézzük az előző geometriai valószínűségi mezős feladatot, és tegyük fel, hogy $v = 0{,}8$. Kérdés: $\mathbb{P}(A \cup B) = ?$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{v/2}{2} = 0,2$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{((1+u)v)/2}{2} = 0,4$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 0,5 + 0,4 - 0,2 = 0,7$$



Boole-, és Bonferroni-egyenlőtlenségek

Állítás: Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ események.

Ekkor

- Boole: $$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$
- Bonferroni:

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j)$$

Köszönöm a figyelmet!