

Vizsgadolgozat

- Írjuk fel az alábbi definíciót, illetve állítást:
 - Legyen (X, Y) együttesen folytonos valószínűségi vektorváltozó. Hogyan definiáljuk az Y -nak az X -re vett feltételes sűrűségfüggvényét?
 - Legyen X egyszerű (diszkrét) valószínűségi változó, és $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amire $\mathbb{E}(g(X))$ létezik. Fejezzük ki $\mathbb{E}(g(X))$ értékét az X eloszlásának segítségével.
- Egy csomag pisztáciában előfordulnak teljesen zárt magok, amiket nehéz kinyitni. Feltehetjük, hogy egy csomagban sok mag van, amelyek egymástól függetlenül, azonos, egyenként kis valószínűséggel lesznek zártak. Jelölje egy csomagban a zárt magok számát X . Tudjuk, hogy $\mathbb{P}(X = 0 \mid X \leq 2) = 0,4$. Határozzuk meg $\text{cov}(1 + 2X, 3X)$ értékét.
- Egy cég vásárol 90 darab izzót az iroda világításához. Tegyük fel, hogy egy izzó élettartama (években számolva) $\text{Exp}(\frac{1}{\sqrt{10}})$ eloszlású, és az izzók élettartamai egymástól függetlenek.
 - Közelítőleg milyen z pozitív valós számra teljesül, hogy 3% valószínűséggel az izzók összes élettartama együttvéve legalább z ?
 - Hogyan változna a fenti tulajdonsággal definiált z értéke, ha az izzók várható élettartama fél évvel megnőne, de a szórásuk nem változna. (Exponenciális eloszlást itt már nem tételezünk fel.)
- Legyen X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y} : (x, y) \mapsto \begin{cases} \alpha x + \beta y & \text{ha } 0 < x < 2 \text{ és } 0 < y < 2, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy $\text{cov}(X, Y) = -\frac{1}{36}$. Határozzuk meg α és β értékét, továbbá a $\mathbb{P}(X < 1)$ valószínűséget.

- Feldobunk egy pénzérmét 4-szer egymás után. Ha a dobások közt nincs két egymást követő fej, akkor nyertünk, egyébként veszítettünk. Feltesszük, hogy a dobások eredményei egymástól függetlenek.
 - Mi a valószínűsége, hogy nyertünk, ha a pénzérménk p eséllyel mutat írás eredményt?
 - Egy rosszakarónk meg akarta cinkelni az érménket, de a módosítás nem sikerült jól. Így az írás eredmény valószínűsége egy véletlen mennyiség $\frac{1}{4}$ és $\frac{3}{4}$ közt, jelölje ezt a valószínűséget U . Tegyük fel, hogy U egyenletes eloszlású az $[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}]$ intervallumon. Határozzuk meg, mekkora eséllyel nyerünk.
- * Béla követőket gyűjt egy online platformon. Kezdetben 1000 követője van. Tegyük fel, hogy ez minden héten vagy 1,1-szeresére nő, vagy nem változik, vagy 0,9-szeresére csökken. Mindhárom kimenetel valószínűsége egyenként $\frac{1}{3}$. Az egyes hetek változásai egymástól függetlenek.
 - Határozzuk meg a követői számának várható értékét 104 hét (kb. két év) elteltével.
 - Közelítőleg mennyi az esélye, hogy Bélának kevesebb követője lesz 104 hét múlva, mint kezdetben?

Tudnivalók: A vizsga időtartama 100 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítjük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

