Vizsgadolgozat

1. Írjuk fel az alábbi definíciót, illetve állítást:
   (a) Hogyan definiáljuk egy egyszerű valószínűségi változó várható értékét?
   (b) Milyen feltétel esetén, és hogyan fejezhető ki az X és Y valószínűségi változók szorzatának várható értéke $\mathbb{E}(X)$ és $\mathbb{E}(Y)$ segítségével, az előadáson elhangzott állítás szerint?

2. Egy képzeletbeli szervezet három ügynöke épp lehallgatja Xavért és Yvettet. Kikapcsolódásképp mindhárman tippelnek: vajon hány kávét iszik aznap Xavér (jelölés: X), illetve Yvett (jelölés: Y). A tippek a következők: 'A' ügynök szerint $\{X \leq 2\}$, 'B' ügynök szerint $\{Y \leq 2\}$, továbbá 'C' ügynök szerint $\{X \leq 3,\, Y \leq 3\}$. Tegyük fel, hogy X és Y független, örökifjú eloszlású, nem-konstans valószínűségi változók a pozitív egész számok halmazán, és $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 2$. Mi a valószínűsége, hogy a három tipp közül legalább egy helyes?

3. Egy nyári táborban szörpivó versenyt rendeznek. A piros csapat összesen 138 korsónyi szörpöt ivott meg. A győzelemhez a kék csapatnak ezt kellene túlteljesítenie. A kék csapatnak 36 tagja van. A csapattagok azonos eloszlású véletlen mennyiségeket isznak, egymástól függetlenül, egyenként átlagosan 4,2 korsónyit, 2 korsónyi szórással.
   (a) Mi a valószínűsége, hogy a kék csapat kikap, azaz összesen kevesebb, mint 138 korsónyit isznak?
   (b) Mekkora kellene legyen 4,2 helyett az átlagos ivókapacitása egy csapattagnak, hogy az a) feladatban kiszámolt valószínűség a felére csökkenjen (azonos szórás mellett)?

4. Legyen $\lambda > 0$ valós szám, $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ és $Y \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$. Tegyük fel, hogy $\mathrm{corr}(X, 2Y) = \lambda$, továbbá Y-nak az X-re vett lineáris regressziója $0{,}01 \cdot X + c$ alakú, valamilyen c valós számra. Határozzuk meg λ és c értékét.

5. Legyen (X, Y) folytonos valószínűségi vektorváltozó, aminek együttes sűrűségfüggvénye:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{ha } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

   Határozzuk meg X sűrűségfüggvényét, az $\mathbb{E}(Y \mid X)$ regressziót, illetve az $\mathbb{E}(Y)$ várható értéket.

6.* Legyen $X \sim N(0,1)$ és legyen a tőle független U valószínűségi változó értéke $\frac{1}{2}$ valószínűséggel $+1$ és $\frac{1}{2}$ valószínűséggel -1. Definiáljuk az $Y = X \cdot U$ valószínűségi változót.
   (a) Igaz-e, hogy $Y \sim N(0,1)$? (Tipp: határozzuk meg a $\mathbb{P}(Y < y)$ valószínűségeket minden $y \in \mathbb{R}$-re, az $\{U = 1\}$ és $\{U = -1\}$ teljes eseményrendszer felhasználásával.)
   (b) Igaz-e, hogy (X, Y) kétdimenziós normális eloszlású?

Tudnivalók: A vizsga időtartama 100 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

Eloszlás neve	Jelölés	$\mathrm{Ran}(X)$	$\mathbb{P}(X=k)$ vagy $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0,1\}$	$p,\ 1-p$		p	$p(1-p)$
binomiális	$\mathrm{B}(n;p)$	$\{0,1,...,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$\{0,1,...\}$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$		λ	λ
geometriai	$\mathrm{Geo}(p)$	$\{1,2,...\}$	$(1-p)^{k-1}p$		$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$\mathrm{U}(a;b)$	$(a;b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$1-e^{-\lambda t}$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
normális	$\mathrm{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$	$\mathbb{R}$	$\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
n-dim normális	$\mathrm{N}\left(\underline{\mu};\underline{\underline{\Sigma}}\right)$	$\mathbb{R}^n$	$f_{\underline{X}}(\underline{t})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det(\underline{\underline{\Sigma}})}}e^{-\frac{1}{2}(\underline{t}-\underline{\mu})^T\underline{\underline{\Sigma}}^{-1}(\underline{t}-\underline{\mu})}$		$\underline{\mu}$	$\underline{\underline{\Sigma}}$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998