Vizsgadolgozat

Megoldás

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Írjuk fel az alábbi definíciót, illetve állítást:

   (a) Hogyan, és milyen feltételek mellett definiáljuk az X és Y valószínűségi változók korrelációját, az X és Y kovarianciájának és szórásainak segítségével?

   (b) Milyen feltétel(eke)t kell teljesítsen egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény ahhoz, hogy létezzen egy X folytonos valószínűségi változó, aminek f a sűrűségfüggvénye? (Feltesszük, hogy f Riemann-integrálható.)

   (2 pont) Ha $\mathrm{cov}(X, Y)$, $\mathbb{D}(X)$ és $\mathbb{D}(Y)$ értelmes, akkor
   (8 pont) X és Y korrelációja:
   $$\mathrm{corr}(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\mathbb{D}(X)\mathbb{D}(Y)}.$$
   (jegyzet: 6.5.1)

   (3 pont) f nemnegatív, és
   (7 pont)
   $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$$
   (jegyzet: 4.2.5)

2. Shrek születésnapi ajándékot szeretne venni Fionának. Tegyük fel, hogy az ajándék kitalálásához szükséges X idő (napokban számolva) folytonos, örökifjú eloszlású valószínűségi változó a $[0, \infty)$ halmazon. Annak a valószínűsége, hogy három napnál tovább tart kitalálni az ajándékot, éppen $e^{-6} \approx 0{,}0025$. Ezután az ajándék beszerzése e^X napig tart. Várhatóan hány napig tart az ajándék kitalálása és beszerzése összesen?

(1 pont) $\mathbb{E}(X+e^X)=?$
(2 pont) $X\sim \text{Exp}(\lambda)$ valamilyen $\lambda>0$ valós számra
(1 pont) $\mathbb{P}(X>3)=e^{-6}$
(1 pont) $\mathbb{P}(X>3)=1-\mathbb{P}(X<3)$
(2 pont) $=1-(1-e^{-\lambda\cdot 3})=e^{-\lambda\cdot 3}$
(1 pont) Ezért $-3\lambda=-6$, azaz $\lambda=2$
(1 pont) $\mathbb{E}(X)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{2}$
(1 pont) Transzformált várható értéke:
(2 pont) $\mathbb{E}\left(g(X)\right)=\int_{\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)\,\mathrm{d}x$
(1 pont) $f_X(x)=2e^{-2x}$
(2 pont) $\mathbb{E}(e^X)=\int_0^\infty e^x\cdot 2e^{-2x}\,\mathrm{d}x$
(2 pont) $=\int_0^\infty 2e^{x-2x}\,\mathrm{d}x=2\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x=2\cdot 1=2$
(2 pont) $\mathbb{E}(X+e^X)=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(e^X)$
(1 pont) $=\frac{1}{2}+2=\underline{\underline{2{,}5}}$

3. Egy TV-műsort 49 blokkból állítanak össze, ahol a blokkok élő bejelentkezések, így véletlenszerű időtartamúak. Tegyük fel, hogy az egyes blokkok hosszai egymástól függetlenek, azonos eloszlásúak, és várható értékük egyenként 2 perc. Annak a valószínűsége, hogy a fenti blokkok teljes időtartama 98 perc és 100 perc közé esik, 0,17. Határozzuk meg (közelítőleg) egy blokk hosszának szórását. (Feltesszük, hogy az egyes blokkok közt nem telik el idő, és időbeli átfedés sincs köztük.)

(0 pont) Jelölje $X_1,\dots,X_{49}$ a blokkok hosszait.
(1 pont) $\mathbb{D}(X_1)=?$
(1 pont) $\mathbb{P}(98<\sum_{i=1}^{49}X_i<100)=0{,}17$
(4 pont) Sztenderdizálunk:

$$\mathbb{P}\left(\frac{98-49\cdot 2}{\sqrt{49}\cdot\mathbb{D}(X_1)}<\frac{\sum_{i=1}^{49}X_i-49\cdot 2}{\sqrt{49}\cdot\mathbb{D}(X_1)}<\frac{100-49\cdot 2}{\sqrt{49}\cdot\mathbb{D}(X_1)}\right)=0{,}17$$

(2 pont) Jelölje $Z=\frac{\sum_{i=1}^{49}X_i-49\cdot 2}{\sqrt{49}\cdot\mathbb{D}(X_1)}$. Ekkor a fenti valószínűség:

$$=\mathbb{P}\left(0<Z<\frac{2}{7\cdot\mathbb{D}(X_1)}\right)$$

(2 pont)

$$=\mathbb{P}\left(Z<\frac{2}{7\cdot\mathbb{D}(X_1)}\right)-\mathbb{P}(Z\leq 0)$$

(2 pont) a centrális határeloszlás-tétel miatt
(3 pont) $Z=\frac{\sum_{i=1}^{49}X_i-49\cdot 2}{\sqrt{49}\cdot\mathbb{D}(X_1)}$ közelítőleg standard normális eloszlású
(1 pont) Tehát a fenti egyenletek szerint

$$0{,}17=\Phi\left(\frac{2}{7\,\mathbb{D}(X_1)}\right)-\Phi(0)$$

(1 pont) $\Phi(0)=\frac{1}{2}$
(1 pont) Tehát $\Phi\left(\frac{2}{7\,\mathbb{D}(X_1)}\right)=0{,}67$
(1 pont) $\frac{2}{7\,\mathbb{D}(X_1)}=0{,}44$
(1 pont) $\mathbb{D}(X_1)=\frac{2}{7\cdot 0{,}44}=\frac{50}{77}\approx 0{,}6494$. (Ha csak hányados, vagy csak tizedestört alakban van megadva a megoldás, akkor is jár a pont.)

4. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását az alábbi táblázat írja le:

$Y \setminus X$	0	2	5
2	α	0.2	0.1
3	0.2	0.25	β

valamilyen $\alpha, \beta \in [0,1]$ valós számokra. Tudjuk, hogy $\{X = 0\}$ és $\{Y = 2\}$ független események. Határozzuk meg α és β értékét, továbbá X és Y kovarianciáját.

(2 pont) Függetlenség miatt $\mathbb{P}(X = 0, Y = 2) = \mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}(Y = 2)$
(0 pont) ahol $\mathbb{P}(X = 0, Y = 2) = \alpha$
(2 pont) és $\mathbb{P}(X = 0) = \alpha + 0{,}2$ illetve $\mathbb{P}(Y = 2) = \alpha + 0{,}2 + 0{,}1$
(1 pont) Tehát $\alpha = (\alpha + 0{,}2) \cdot (\alpha + 0{,}3)$
(1 pont) Ezt α-ra megoldva: $\alpha = 0{,}2$ vagy $\alpha = 0{,}3$.
(2 pont) A táblázatban szereplő 6 szám összege 1.
(1 pont) Ezért $\alpha \neq 0{,}3$, mert úgy az ismert 5 szám összege 1-nél nagyobb lenne.
(1 pont) Tehát $\alpha = 0{,}2$ és $\beta = 0{,}05$.
(2 pont) $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$
(2 pont) Soronként balról jobbra haladva a táblázaton:

$$\mathbb{E}(XY) = 0 \cdot 2 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 2 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 3 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 3 \cdot 0{,}25 + 5 \cdot 3 \cdot 0{,}05$$

(Ha az α és β konkrét értéke nélkül szerepel $\mathbb{E}(XY)$ akkor is jár a teljes pont.)
(1 pont) $\mathbb{E}(XY) = 4{,}05$
(1 pont) $\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 2) + 5 \cdot \mathbb{P}(X = 5)$
(Ha rögtön behelyettesítve van kiszámolva $\mathbb{E}(X)$ értéke, akkor is jár a teljes pont.)
(1 pont) $= 0 + 2 \cdot 0{,}45 + 5 \cdot 0{,}15 = 1{,}65$
(1 pont) Hasonlóan, $\mathbb{E}(Y) = 2 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}5$
(1 pont) $= 2{,}5$
(1 pont) Tehát $\mathrm{cov}(X, Y) = 4{,}05 - 1{,}65 \cdot 2{,}5 = \underline{\underline{-0{,}075}}$

5. Az öttusa lovas számában egy versenyzőnek 12 akadályt kell átugrania egy számára ismeretlen lóval. Tegyük fel, hogy az egyes akadályokat egymástól függetlenül, p valószínűséggel sikerül átugrania.

   (a) Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 1 akadályt ver le a versenyző (azaz nem sikerül átugrania), p függvényében?

   (b) A lovat véletlenszerűen választják, így a p valószínűség nem meghatározott. Ezért jelölje V egy akadály átugrásának valószínűségét. Tegyük fel, hogy V folytonos valószínűségi változó, aminek eloszlásfüggvénye

$$F_V(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x^3 & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ 1 & \text{egyébként} \end{cases}$$

   a ló kiválasztásától függően. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy legfeljebb 1 akadályt ver le a versenyő.

(0 pont) X: levert akadályok száma (ahol az átugrás sikerességének valószínűsége p)
(1 pont) $\mathbb{P}(X \leq 1) = ?$
(2 pont) $X \sim B(12; 1 - p)$
(1 pont) $\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)$
(2 pont) $= \binom{12}{0}(1-p)^0 p^{12} + \binom{12}{1}(1-p)^1 p^{11}$
(1 pont) $= p^{12} + 12(1-p)p^{11} = 12p^{11} - 11p^{12}$
(0 pont) Y: levert akadályok száma, ahol az átugrás sikerességének valószínűsége V, $\mathbb{P}(Y \leq 1) = ?$
(4 pont) Teljes valószínűség tétele:

$$\mathbb{P}(Y \leq 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(Y \leq 1 \mid V = x) f_V(x) \mathrm{d}x$$

(2 pont) $\mathbb{P}(Y \leq 1 \mid V = p) = \mathbb{P}(X \leq 1)$
(Ez a lépés más jelöléssel, vagy akár szövegesen is szerepelhet, akkor is jár a teljes pont. A szükséges gondolat, hogy az a) rész eredményét felhasználhatjuk a b) részben szereplő feltételes valószínűséghez.)
(2 pont) $f_V = F_V'$
(2 pont) $f_V(x) = 6(x - x^2)$ ha $0 < x < 1$ és 0 egyébként.
(1 pont) Tehát behelyettesítve:

$$\mathbb{P}(Y \leq 1) = \int_0^1 (12x^{11} - 11x^{12}) \cdot 6(x - x^2)\,\mathrm{d}x$$

(2 pont)

$$= \int_0^1 72x^{12} - 72x^{13} - 66x^{13} + 66x^{14}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{72}{13}x^{13} - \frac{72}{14}x^{14} - \frac{66}{14}x^{14} + \frac{66}{15}x^{15}\right]_0^1 = \frac{37}{455} \approx 0{,}0813$$

(Ha csak hányados, vagy csak tizedestört alakban van megadva a megoldás, akkor is jár a pont.)

6.* Béla kísérleteket végez egymás után, amelyek külön-külön $\frac{1}{2}$ valószínűséggel sikeresek. A második sikeres kísérletnél megáll (de azelőtt nem). Tegyük fel, hogy a kísérletek egymástól függetlenek. Jelölje X az elvégzett kísérletek számát. Határozzuk meg X eloszlását (azaz a $\mathbb{P}(X = k)$ értékeket) és X várható értékét.

(3 pont) $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k - 1) - \mathbb{P}(X > k)$
(2 pont) $\mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(\text{legfeljebb 1 siker az első k kísérletben})$
(2 pont) $= \binom{k}{0}\frac{1}{2^k} + \binom{k}{1}\frac{1}{2^k} = (k+1)\frac{1}{2^k}$
(1 pont) Behelyettesítve $k - 1$-et: $\mathbb{P}(X > k - 1) = k \cdot \frac{1}{2^{k-1}}$
(1 pont) Tehát $\mathbb{P}(X = k) = k \cdot \frac{1}{2^{k-1}} - (k+1)\frac{1}{2^k}$
(2 pont) $= (k-1)\frac{1}{2^k}$ minden $k \geq 1$ egész számra.

1. megoldás a várható értékre:
(3 pont) $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = k)$
(2 pont) $= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (k-1)\frac{1}{2^k}$
(2 pont) $= \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)$ ahol $Z \sim \text{Geo}\left(\frac{1}{2}\right)$
(1 pont) $\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{D}^2(Z) + \mathbb{E}(Z)^2 = 2 + 2^2 = 6$ és $\mathbb{E}(Z) = 2$
(1 pont) $\mathbb{E}(X) = 6 - 2 = \underline{\underline{4}}$

2. megoldás a várható értékre:
(3 pont) Y_1: első sikerig elvégzett kísérletek száma, Y_2: első siker után a második sikerig elvégzett kísérletek száma (nem beleértve az első sikert)
(2 pont) $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y_1 + Y_2) = \mathbb{E}(Y_1) + \mathbb{E}(Y_2)$
(2 pont) $Y_1 \sim \text{Geo}\left(\frac{1}{2}\right)$
(1 pont) $Y_2 \sim \text{Geo}\left(\frac{1}{2}\right)$
(1 pont) Tehát $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y_1 + Y_2) = 2 + 2 = \underline{\underline{4}}$