Vizsgadolgozat
Megoldás

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Írjuk fel az alábbi definíciót, illetve állítást:

   (a) Mikor nevezzük az $X_1, \ldots, X_n$ valószínűségi változókat (együttesen) függetlennek? ($n > 0$)

   (b) Írjuk fel az Y valószínűségi változó X-re vett lineáris regresszióját, és az abban szereplő (tipikusan α-val és β-val jelölt) együtthatókat az X és Y változók kovarianciája, várható értékei, és szórásai segítségével.

   (10 pont) Az $X_1, \ldots, X_n$ valószínűségi változók (együttesen) függetlenek, ha az

   $$\{X_1 < x_1\}, \ldots, \{X_n < x_n\}$$

   események függetlenek minden $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ esetén. (jegyzet: 7.2.1)

   (10 pont) Ha $\mathbb{D}^2(X)$, $\mathbb{D}^2(Y)$ és $\operatorname{cov}(X, Y)$ véges, továbbá $\mathbb{D}^2(X) \neq 0$, akkor az Y valószínűségi változónak az X-re vett lineáris regressziója az a $\beta X + \alpha$ valószínűségi változó, amire

   $$\beta = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}^2(X)} \qquad \text{és} \qquad \alpha = \mathbb{E}(Y) - \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}^2(X)}\mathbb{E}(X).$$

   (jegyzet: 10.2.1 és 10.2.2)
   (Ha hiányzik a $\mathbb{D}^2(X) \neq 0$ feltétel, legfeljebb 9 pont. Ha csak az egyik egyenlet helyes, legfeljebb 5 pont.)

2. Binomiális és Geometriai eloszlás bemegy a kocsmába. Geometriai kér egy sört és megissza, és minden egyes sör után $\frac{1}{3}$ eséllyel kér egy újabbat és megissza. Binomiális kér 4 sört, és ezeket egymástól függetlenül, egyenként $\frac{1}{2}$ eséllyel elfogyasztja. Feltéve, hogy Geometriai több sört ivott, mint Binomiális, mi az esélye, hogy Binomiális egyet sem ivott meg?

   (2 pont) Geometriai által ivott sörök száma: $G \sim \operatorname{Geo}\left(\frac{2}{3}\right)$

   (1 pont) Binomiális által ivott sörök száma: $H \sim \operatorname{B}\left(4; \frac{1}{2}\right)$

(1 pont) $\mathbb{P}(H = 0 \mid G > H) =?$
(1 pont) Legyen $A_k = \{H = k\}$, ekkor A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 teljes eseményrendszer
(0 pont) Legyen $B = \{G > H\}$.
(1 pont) Bayes-tétel:
(4 pont)

$$\mathbb{P}(A_0 \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_0) \cdot \mathbb{P}(A_0)}{\sum_{k=0}^{4} \mathbb{P}(B \mid A_k) \cdot \mathbb{P}(A_k)}$$

(2 pont) $\mathbb{P}(A_k) = \binom{4}{k} \cdot \frac{1}{2^4}$
(2 pont) $\mathbb{P}(B \mid A_k) = \mathbb{P}(G > H \mid H = k) = \mathbb{P}(G > k \mid H = k) = \mathbb{P}(G > k)$
(2 pont) $= \mathbb{P}(\text{első } k \text{ sör után újat kér}) = \left(1 - \frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3^k}$
(3 pont) Behelyettesítve:

$$\mathbb{P}(A_0 \mid B) = \frac{\frac{1}{3^0} \cdot \binom{4}{0} \cdot \frac{1}{2^4}}{\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{3^k} \cdot \binom{4}{k} \cdot \frac{1}{2^4}} = \frac{\frac{1}{2^4}}{\sum_{k=0}^{4} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-k}\right) \cdot \binom{4}{k} \cdot \left(\left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2^4}}{\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{4-k}} = \frac{\frac{1}{2^4}}{\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot 1}$$

(A behelyettesített kifejezés máshogy is kiszámolható, például a nevezőben lévő szumma tagjainak numerikus kiértékelésével.)
(1 pont) Tehát $\mathbb{P}(A_0 \mid B) = \frac{81}{256} \approx 0{,}3164$. (Ha csak hányados, vagy csak tizedestört alakban van megadva a megoldás, akkor is jár a pont.)

3. A manók az északi sarkon zsákokat töltenek meg ajándékokkal. Az egyes ajándékok térfogata egymástól független, azonos eloszlású valószínűségi változó, várható értéke $0{,}4\,\mathrm{m}^3$, szórása pedig $0{,}23\,\mathrm{m}^3$. Egy zsákba mindig 12 darab ajándék kerül, továbbá összesen 48 darab zsákot töltenek meg ajándékokkal. Egy zsák térfogata a benne lévő ajándékok térfogatösszegének 110%-a. Mi az esélye, hogy a zsákok beférnek a Mikulás szánjába, ha a szán összesen $256\,\mathrm{m}^3$-nyi zsák elszállítására képes? (A zsákok térfogatai összeadódnak.)

(0 pont) Jelölje $Y_1, \ldots, Y_{48}$ a zsákok térfogatait.
(1 pont) $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{48} Y_i < 256) =?$
(4 pont) Sztenderdizálunk:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{48} Y_i - 48 \cdot \mathbb{E}(Y_1)}{\sqrt{48} \cdot \mathbb{D}(Y_1)} < \frac{256 - 48 \cdot \mathbb{E}(Y_1)}{\sqrt{48} \cdot \mathbb{D}(Y_1)}\right) =?$$

(1 pont) Jelölje $X_1, \ldots, X_{12}$ az első zsákban lévő ajándékok térfogatait.
(1 pont) $Y_1 = 1{,}1 \cdot \sum_{k=1}^{12} X_k$
(2 pont) $\mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}\left(1{,}1 \cdot \sum_{k=1}^{12} X_k\right) = 1{,}1 \cdot \sum_{k=1}^{12} \mathbb{E}(X_k) = 1{,}1 \cdot 12 \cdot 0{,}4 = 5{,}28$
(2 pont) $\mathbb{D}^2(Y_1) = \mathbb{D}^2(1{,}1 \cdot \sum_{k=1}^{12} X_k) = 1{,}1^2 \cdot \sum_{k=1}^{12} \mathbb{D}^2(X_k) = 1{,}1^2 \cdot 12 \cdot 0{,}23^2$
(2 pont) $\mathbb{D}(Y_1) = 1{,}1 \cdot 0{,}23 \cdot \sqrt{12}$ ($\approx 0{,}8764$)
(0 pont) Mivel Y_i-k egymástól független, azonos eloszlású val. változók, ezért
(2 pont) a centrális határeloszlás-tétel miatt
(3 pont) $\frac{\sum_{i=1}^{48} Y_i - 48 \cdot \mathbb{E}(Y_1)}{\sqrt{48} \cdot \mathbb{D}(Y_1)}$ közelítőleg standard normális eloszlású.
(1 pont) Tehát a keresett mennyiség: $\Phi\left(\frac{256 - 48 \cdot 5{,}28}{\sqrt{48} \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}23 \cdot \sqrt{12}}\right)$
(1 pont) $= \Phi(0{,}42) = \underline{\underline{0{,}6628}}$

(Alternatív, teljes értékű megoldás érhető el úgy is, ha a $12 \cdot 48$ darab ajándék térfogataira alkalmazzuk a centrális határeloszlás-tételt, és konzisztensen szorzunk fel 1,1-el.)

4. Legyen U és V együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{U,V} : (u, v) \mapsto \begin{cases} \frac{3}{4}(u^2 + v^2) & \text{ha } 0 < u < 1 \text{ és } -1 < v < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a $\mathbb{P}(U^2 > V^2)$ valószínűséget, illetve U és V kovarianciáját.

(3 pont) $\underline{X} = (U, V)$ és $H \subseteq \mathbb{R}^2$ esetén $\mathbb{P}(\underline{X} \in H)) = \int_H f_{\underline{X}}(\underline{x}) \mathrm{d}\underline{x}$
(2 pont) Legyen $H = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 > v^2\}$. (Ha a H definíciója implicit jelenik meg az előző állítás felhasználásakor, szintén jár a pont.)
(1 pont) Vegyük észre, hogy $u^2 > v^2 \iff |u| > |v| \iff |u| > v > -|u|$
(3 pont) Mivel f csak ott nem-nulla, ahol $0 < u < 1$ és $-1 < v < 1$, ezért

$$\mathbb{P}(U^2 > V^2) = \int_H f_{U,V}(u, v) \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}u = \int_0^1 \int_{-u}^u \frac{3}{4}(u^2 + v^2) \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}u$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{3}{4}u^2 v + \frac{1}{4}v^3\right]_{-u}^{u} \mathrm{d}u = \int_0^1 2u^3 \,\mathrm{d}u = \left[2\frac{u^4}{4}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

(2 pont) $\mathrm{cov}(U, V) = \mathbb{E}(UV) - \mathbb{E}(U)\,\mathbb{E}(V)$
(1 pont) Transzformált várható értéke:
(2 pont) $\mathbb{E}(UV) = \int_{\mathbb{R}^2} uv \cdot f_{U,V}(u, v) \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v$
(5 pont)

$$\mathbb{E}(UV) = \int_0^1 \int_{-1}^1 uv \cdot \frac{3}{4}(u^2 + v^2) \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}u = \int_0^1 \left[\frac{3}{8}u^3 v^2 + \frac{3}{16}uv^4\right]_{v=-1}^{1} \mathrm{d}u = \int_0^1 0 \,\mathrm{d}u = 0$$

Hasonlóan,

$$\mathbb{E}(V) = \int_0^1 \int_{-1}^1 v \cdot \frac{3}{4}(u^2 + v^2) \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}u = \int_0^1 \left[\frac{3}{8}u^2 v^2 + \frac{3}{16}v^4\right]_{v=-1}^{1} \mathrm{d}u = \int_0^1 0 \,\mathrm{d}u = 0$$

(A két várható érték analóg logikával számolható, így ha csak az egyik szerepel, 4 pont adható.)
(1 pont) Tehát $\mathrm{cov}(U, V) = 0 \cdot \mathbb{E}(U) \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$.
(Alternatív levezetés: a sűrűségfüggvény páros, az uv, illetve v függvények páratlanok v-ben, ezért a v szerinti fenti, szimmetrikus végpontú integrálok értéke 0.)

5. Egy kátyúzással foglalkozó vállalkozó, Tömi Tomi feladata feltölteni az utca végén lévő kátyút. Ha csak $t > 0$ idő múlva sikerül feltöltenie a kátyút, akkor ezen t idő alatt Y számú arrajárónak okoz kellemetlenséget a hiba, ahol Y eloszlása $\mathrm{Pois}(t)$.

   (a) Határozzuk meg $\mathbb{E}(Y)$ és $\mathbb{E}(Y^2)$ értékét t függvényében.

   (b) Mivel Tamás rendszertelen időközönként javítja a gödröt, így az utca végi kátyú feltöltésének T időpontja folytonos, örökifjú eloszlású valószínűségi változó a $[0, \infty)$ halmazon. Legyen Z az a valószínűségi változó, aminek $T = t$ feltétel esetén az eloszlása megegyezik a fenti Y eloszlásával. Határozzuk meg az $\mathbb{E}(T)$, $\mathbb{E}(Z^2)$ és $\mathbb{D}(Z)$ mennyiségeket, ha tudjuk, hogy $\mathbb{E}(Z) = 2$.

(1 pont) $Y \sim \mathrm{Pois}(t)$, ezért $\mathbb{E}(Y) = t$ (és $\mathbb{D}^2(Y) = t$).
(2 pont) $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{D}^2(Y) + \mathbb{E}(Y)^2$, ezért $\mathbb{E}(Y^2) = t + t^2$
(2 pont) $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ valamilyen λ pozitív valós számra.
(1 pont) $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda}$, de $\lambda = ?$
(1 pont) Teljes várható érték tétele alapján:
(3 pont) $\mathbb{E}(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(Z \mid T = t) f_T(t) \,\mathrm{d}t$
(1 pont) ahol $\mathbb{E}(Z) = 2$ és $\mathbb{E}(Z \mid T = t) = \mathbb{E}(Y) = t$
(1 pont) Továbbá $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$
(2 pont) Tehát

$$2 = \mathbb{E}(Z) = \int_0^{\infty} t \cdot \lambda e^{-\lambda t} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$$

(1 pont) Emiatt $\lambda = \frac{1}{2}$, tehát $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda} = \underline{\underline{2}}$.
(0 pont) $\mathbb{D}^2(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2$
(1 pont) Hasonlóan, teljes várható érték tétele alapján:

$$\mathbb{E}(Z^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(Z^2 \mid T = t) f_T(t)\,\mathrm{d}t$$

(1 pont) ahol $\mathbb{E}(Z^2 \mid T = t) = \mathbb{E}(Y^2) = t + t^2$
(2 pont) Tehát

$$\mathbb{E}(Z^2) = \int_0^{\infty} (t + t^2) \cdot \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2} = 2 + 2 \cdot 4 = 10$$

(1 pont) Ezért $\mathbb{D}^2(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = 10 - 2^2 = 6$. Tehát $\mathbb{D}(Z) = \underline{\underline{\sqrt{6}}}$.

6.* Legyen $(X, Y) \sim N(\underline{0}, \underline{\underline{\Sigma}})$ kétdimenziós normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó, ahol

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Legyen $W = 2X - Y$. Határozzuk meg (X, W) kovarianciamátrixát.
(b) Határozzuk meg a $\mathbb{P}(X < Y \mid X > 0)$ valószínűséget.

(2 pont) Tetszőleges $\underline{Z} = (U, V)$ valószínűségi vektorváltozóra:

$$\mathrm{cov}(\underline{Z}) = \begin{pmatrix} \mathbb{D}^2(U) & \mathrm{cov}(U, V) \\ \mathrm{cov}(U, V) & \mathbb{D}^2(V) \end{pmatrix}$$

(Ha a kovarianciamátrix kibontása a konkrét (X, Y) vagy (X, W) vektorok valamelyikére történik, akkor is jár a pont.)
(1 pont) Ezért $\mathbb{D}^2(X) = 1$, $\mathbb{D}^2(Y) = 5$ és $\mathrm{cov}(X, Y) = 2$
(1 pont) $\mathrm{cov}(X, W) = \mathrm{cov}(X, 2X - Y) = 2\mathrm{cov}(X, X) - \mathrm{cov}(X, Y)$
(1 pont) $= 2 \cdot 1 - 2 = 0$
(1 pont)

$$\mathbb{D}^2(W) = \mathrm{cov}(2X - Y, 2X - Y) = \mathrm{cov}(2X, 2X) - 2 \cdot \mathrm{cov}(2X, Y) + \mathrm{cov}(Y, Y)$$

(1 pont)

$$= 2 \cdot 2 \cdot \mathrm{cov}(X, X) - 2 \cdot 2 \cdot \mathrm{cov}(X, Y) + \mathrm{cov}(Y, Y) = 4 - 8 + 5 = 1$$

(1 pont) Tehát (X, W) kovarianciamátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1 pont) $X < Y \Leftrightarrow X < 2X - W \Leftrightarrow W < X$
(2 pont) Tehát

$$\mathbb{P}(X < Y \mid X > 0) = \mathbb{P}(W < X \mid X > 0) = \frac{\mathbb{P}(W < X, X > 0)}{\mathbb{P}(X > 0)}$$

(Ha W behelyettesítése nélkül van kibontva a feltételes valószínűség definíciója, 1 pont.)
(1 pont) $\mathbb{P}(X > 0) = \frac{1}{2}$, hiszen $X \sim N(0; 1)$, aminek az eloszlása nullára szimmetrikus.
(2 pont) $\mathbb{P}(W < X, X > 0) = \int_H f_{X,W}(x, w)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v$ ahol $H = \{(x, w) \in \mathbb{R}^2 \mid w < x, x > 0\}$
(1 pont) A H halmaz épp az $x = w$ és az $x = 0$ egyenesek által meghatározott azon szögtartomány, ami az $x > 0$ oldalon van. (Ha a H halmaz csak ábrán szerepel, nem leírva, akkor is jár a pont.)
(2 pont) $f_{X,W}(x, w)$ forgásszimmetrikus, hiszen (X, W) kétdimenziós standard normális eloszlású
(1 pont) a H halmaz szöge $\frac{3}{8} \cdot 2\pi$, hiszen 3 darab 45 fokos szögtartományra bontható, míg a teljes sík, 8 darab 45 fokos szögtartományra.
(1 pont) Az előző két pont miatt, és felhasználva, hogy $\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,W}(x, w)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = 1$, azt kapjuk, hogy $\mathbb{P}(W < X, X > 0) = \frac{3}{8}$
(Ha nincs hivatkozás arra, hogy $f_{X,W}(x, w)$ teljes integrálja 1, akkor is jár a pont. Ha más módon – például polárkoordinátákkal – van meghatározva a valószínűség, akkor is jár a pont.)
(1 pont) Tehát $\mathbb{P}(X < Y \mid X > 0) = \frac{\mathbb{P}(W<X, X>0)}{\mathbb{P}(X>0)} = \frac{3}{8} / \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$