Pótló zárthelyi dolgozat

Megoldás

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Legyenek A, B, C olyan események, amire A és C kizáró, $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{10}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ és $\mathbb{P}(C) = 0{,}6$. Tudjuk továbbá, hogy a $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(B \cap C)$ és $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$ értékek háromtagú számtani sorozatot alkotnak ebben a sorrendben. Határozzuk meg $\mathbb{P}(B \cap C)$ értékét. (Az a_1, a_2, a_3 háromtagú sorozat pontosan akkor számtani, ha $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$.)

   (2 pont) A és C kizáró, ezért $\mathbb{P}(A \cap C) = 0$
   (3 pont) $\mathbb{P}(A \cap C) = 0$ és $A \cap B \cap C \subseteq A \cap C$ ezért $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$
   (2 pont) számtani sorozatra vonatkozó feltevés miatt $\mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cup B \cup C) - \mathbb{P}(B \cap C)$
   (1 pont) Poincaré-formula alapján:
   (4 pont) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$
   (6 pont)

   $$2\,\mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B) \overset{\text{számtani}}{=} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) \overset{\text{Poincaré}}{=} 0{,}1 + 0{,}5 + 0{,}6 - \mathbb{P}(A \cap B) - 0 - \mathbb{P}(B \cap C) + 0$$

   Összevonva: $3 \cdot \mathbb{P}(B \cap C) = 1{,}2$
   (Az öt tag számszerű eredményének helyes behelyettesítése: 2 pont; a számtani sorozatos feltétel helyes felhasználása – tetszőleges értelmes módon – további 2 pont; az egyenlet rendezése: 2pont. Ha a számtani sorozatos feltétel felhasználásához további változók vannak bevezetve, helyesen, és ezek fel vannak használva az egyenlet rendezésben, akkor úgyanúgy jár a másodszori 2 pont.)
   (2 pont) Tehát $\mathbb{P}(B \cap C) = \underline{\underline{0{,}4}}$

2. Legyen X olyan valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye:

   $$f_X(x) = \begin{cases} \alpha & \text{ha } \beta \le x \le \beta + 5 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

   valamilyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ számokra. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(X) = F_X\left(\frac{1}{2}\right)$, ahol F_X jelöli az X eloszlásfüggvényét. Határozzuk meg α és β értékét.

(3 pont) f_X sűrűségfüggvény, ezért $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = 1$
(2 pont) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{\beta}^{\beta+5} \alpha\mathrm{d}x$
(2 pont) $= [\alpha x]_{\beta}^{\beta+5} = \alpha\cdot(\beta+5) - \alpha\cdot\beta = 5\alpha$
(1 pont) $5\alpha = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = \frac{1}{5}}}$
(Ha felismerjük, hogy X eloszlása egyenletes, β és $\beta+5$ határokkal, és ebből következtetjük, hogy $\alpha = \frac{1}{5}$, akkor is jár a teljes pont a fenti lépésekre.)
(3 pont) $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_X(x)\mathrm{d}x$
(1 pont) $= \int_{\beta}^{\beta+5} x\cdot\frac{1}{5}\mathrm{d}x$
(1 pont) $= \left[\frac{x^2}{10}\right]_{\beta}^{\beta+5} = \frac{(\beta+5)^2}{10} - \frac{\beta^2}{10} = \beta + 2{,}5$
(Ha felismerjük, hogy X eloszlása egyenletes, β és $\beta+5$ határokkal, és ebből következtetjük, hogy $\mathbb{E}(X) = \frac{\beta+(\beta+5)}{2}$, akkor is jár a pont az $\mathbb{E}(X)$-hez vezető lépésekre.)
(2 pont) $F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f_X(x)\mathrm{d}x$
(1 pont) Ha $\frac{1}{2} < \beta$, akkor $F_X\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, tehát a feladatban szereplő egyenletbe behelyettesítve: $\beta + 2{,}5 = 0$, azaz $\beta = -2{,}5$, ami ellentmond az $\frac{1}{2} < \beta$ feltevésnek.
(1 pont) Ha $\frac{1}{2} > \beta + 5$, akkor $F_X\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, tehát a feladatban szereplő egyenletbe behelyettesítve: $\beta + 2{,}5 = 1$, azaz $\beta = -1{,}5$, ami ellentmond az $\frac{1}{2} > \beta + 5$ feltevésnek.
(1 pont) Ha $\beta < \frac{1}{2} < \beta + 5$, akkor $F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{\beta}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{5}\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\cdot\beta$
(1 pont) A feladatban szereplő egyenletbe behelyettesítve: $\beta + 2{,}5 = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\cdot\beta$
(1 pont) Tehát $\underline{\underline{\beta = -2}}$

3. Egy öt méter oldalhosszúságú, négyzet alakú kertben egy egyenletesen véletlenszerűen választott helyre fát ültetünk. A kertet mind a négy oldaláról kerítés veszi körül. Ha a fa (ültetési pontja) két kerítésvonalhoz is 1 méternél közelebb van, akkor $\frac{1}{3}$ eséllyel lóg át a szomszédhoz a fa valamely ága; míg ha csak egy kerítésvonalhoz van 1 méternél közelebb, akkor $\frac{1}{4}$ eséllyel lóg át. Egyéb esetben $\frac{1}{6}$ eséllyel lóg át a fa a szomszédhoz. Feltéve, hogy átlóg a fa, mi a valószínűsége, hogy a négyzet egyik oldalához sem volt az ültetési pont 1 méternél közelebb?

(2 pont) Jelölés:
A_2: két kerítésvonalhoz is 1 méternél közelebb van
A_1: csak egy kerítésvonalhoz van 1 méternél közelebb
A_0: egyik kerítésvonalhoz sincs 1 méternél közelebb
B: átlóg a fa
(2 pont) Kérdés: $\mathbb{P}(A_0 \mid B) = ?$
(1 pont) A_0, A_1, A_2 teljes eseményrendszer
(1 pont) Bayes-tétel:
(4 pont)

$$\mathbb{P}(A_0 \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_0)\cdot\mathbb{P}(A_0)}{\mathbb{P}(B \mid A_0)\cdot\mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(B \mid A_1)\cdot\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B \mid A_2)\cdot\mathbb{P}(A_2)}$$

(Ha az egyszerű Bayes-tételre és a teljes valószínűség tételére külön-külön van hivatkozva, vagy direktben a feltételes valószínűségek kibontásával történik a megoldás, akkor is jár a pont. A felírt egyenletek helyes blokkjaira arányos részpontszám adható, de legfeljebb 2 pont.)
(2 pont) $\mathbb{P}(B \mid A_0) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(B \mid A_1) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(B \mid A_2) = \frac{1}{3}$
(3 pont) Geometriai valószínűségekként számolva:
$\mathbb{P}(A_0) = \frac{3\cdot 3}{5\cdot 5} = 0{,}36$, $\mathbb{P}(A_1) = \frac{3+3+3+3}{5\cdot 5} = 0{,}48$, $\mathbb{P}(A_2) = \frac{4}{5\cdot 5} = 0{,}16$
(3 pont) Behelyettesítve:

$$\mathbb{P}(A_0 \mid B) = \frac{\frac{1}{6}\cdot 0{,}36}{\frac{1}{6}\cdot 0{,}36 + \frac{1}{4}\cdot 0{,}48 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}16}$$

(2 pont) $= \underline{\underline{\frac{9}{35} \approx 0{,}2571}}$

4. Kutató Kálmán szeretne egy $B\left(12; \frac{1}{3}\right)$ eloszlású X valószínűségi változót használni a kísérletei során. Sajnos a rendelkezésére álló eszközzel csak $Y \sim B\left(n; \frac{1}{2}\right)$ változót tud előállítani (költséghatékonysági megfontolásokból), ahol $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Azt találja ki, hogy X helyett egy $c\cdot Y$ alakú változót fog

használni, ahol a c és n paramétereket úgy választja meg, hogy egyrészt az $\mathbb{E}(X - c \cdot Y) = 0$ egyenlet teljesüljön, másrészt az $|\mathbb{P}(X > 0) - \mathbb{P}(c \cdot Y > 0)|$ különbség a lehető legkisebb legyen (azaz a két tag közelítőleg egyenlő legyen). Milyen c és n paramétereket kellett választania?

(2 pont) $\mathbb{P}(X > 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 0)$
(2 pont) $= 1 - \binom{12}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{12} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{12} \approx 0{,}9923$
(1 pont) $\mathbb{P}(c \cdot Y > 0) = 1 - \mathbb{P}(c \cdot Y = 0)$
(2 pont) $= 1 - \mathbb{P}(Y = 0)$
(2 pont) $= 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$
(1 pont) A két valószínűséget összevetve: $\mathbb{P}(X > 0) - \mathbb{P}(c \cdot Y > 0) = -\left(\frac{2}{3}\right)^{12} + \left(\frac{1}{2}\right)^n$
(2 pont) A fenti mennyiség akkor a legkisebb abszolút értékben, ha $n = 7$. Ez akár az egész értékek szisztematikus kipróbálásával, akár a két tag logaritmusát nézve meghatározható: $12 \cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right) \approx n \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow n \approx 12 \cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right) / \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 7{,}0196$
(1 pont) Kerekítve: $\underline{\underline{n = 7}}$.
(3 pont) $\mathbb{E}(X - c \cdot Y) = \mathbb{E}(X) - c \cdot \mathbb{E}(Y)$
(2 pont) $\mathbb{E}(X) = 12 \cdot \frac{1}{3} = 4$ és $\mathbb{E}(Y) = n \cdot \frac{1}{2}$, mivel binomiális eloszlásúak.
(1 pont) Behelyettesítve: $4 = \frac{c \cdot n}{2}$
(1 pont) Tehát $c = \frac{4 \cdot 2}{n} = \underline{\underline{\frac{8}{7} \approx 1{,}1429}}$.

5. Belinda esténként hobbiból meteorokat fotóz, naponta átlagosan 5 darabot. Ha valamelyik napon éppen 7 meteort sikerül lefotóznia (de nem többet), akkor meglepi magát egy új teleszkóppal. Feltehetjük, hogy potenciálisan sok meteor látható az égen, és az egyes meteorokat egymástól függetlenül, azonos, egyenként kis valószínűséggel sikerül lefotóznia. Jelölje Y azt, hogy hanyadik napon sikerül először éppen 7 meteort fotóznia. Mennyi az $\{5 \leq Y < 7\}$ esemény valószínűsége?

(2 pont) Jelölje X az egy napon lefotózott meteorok számát.
(3 pont) $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ valamilyen λ pozitív valós számra (indoklás: egymástól független, azonos, kis valószínűségű események közül a sikeres kísérletek száma).
(2 pont) $\mathbb{E}(X) = 5$, ezért $\lambda = 5$.
(2 pont) $Y \sim \text{Geo}(p)$
(3 pont) ahol $p = \mathbb{P}(X = 7)$
(2 pont) $= \frac{5^7}{7!} \cdot e^{-5} \approx 0{,}1044$
(3 pont) $\mathbb{P}(5 \leq Y < 7) = \mathbb{P}(Y = 5) + \mathbb{P}(Y = 6)$
(2 pont) $= p \cdot (1-p)^4 + p \cdot (1-p)^5$
(1 pont) $\approx \underline{\underline{0{,}1274}}$

6.* A és B játékos felváltva dobnak két szabályos dobókockával, A játékos kezd. Ha az A játékos által az adott körben dobott számok összege 6, akkor ő nyert. Ha a B játékos által az adott körben dobott számok összege 9, akkor ő nyert. Ha két kör után, azaz B játékos második dobása után még nincs győztes, akkor a végeredmény döntetlen. Várhatóan hány dobás történik a játék során?

(1 pont) Jelölje X a dobások számát. $\mathbb{E}(X) =?$
(3 pont) $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{4} k \cdot \mathbb{P}(X = k)$
(2 pont) $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(A \text{ nyerőt dob}) = \frac{5}{36}$, mert A játékos 5-féle módon módon dobhat 6-ost: $(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)$.
(2 pont) $\mathbb{P}(B \text{ nyerőt dob}) = \frac{4}{36}$, mert B játékos 4-féle módon dobhat 9-est: $(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)$.
(3 pont) $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 2 \mid X > 1) \cdot \mathbb{P}(X > 1) = \mathbb{P}(B \text{ nyerőt dob}) \cdot (1 - \mathbb{P}(A \text{ nyerőt dob}))$
(1 pont) $= \frac{4}{36} \cdot (1 - \frac{5}{36}) = \frac{31}{324} \approx 0{,}0957$
(2 pont) Hasonlóan, $\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(A \text{ nyerőt dob}) \cdot (1 - \mathbb{P}(B \text{ nyerőt dob})) \cdot (1 - \mathbb{P}(A \text{ nyerőt dob}))$
(1 pont) $= \frac{5}{36} \cdot (1 - \frac{4}{36}) \cdot (1 - \frac{5}{36}) = \frac{155}{1458} \approx 0{,}1063$
(3 pont) Továbbá, $\mathbb{P}(X = 4) = 1 - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2) - \mathbb{P}(X = 3) = \frac{961}{1458} \approx 0{,}6591$
(2 pont) Tehát $\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{5}{36} + 2 \cdot \frac{31}{324} + 3 \cdot \frac{155}{1458} + 4 \cdot \frac{961}{1458} = \underline{\underline{3{,}2857}}$