Pótló zárthelyi dolgozat

1. Legyenek A, B, C olyan események, amire A és C kizáró, $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{10}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ és $\mathbb{P}(C) = 0{,}6$. Tudjuk továbbá, hogy a $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(B \cap C)$ és $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$ értékek háromtagú számtani sorozatot alkotnak ebben a sorrendben. Határozzuk meg $\mathbb{P}(B \cap C)$ értékét. (Az a_1, a_2, a_3 háromtagú sorozat pontosan akkor számtani, ha $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$.)

2. Legyen X olyan valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye:
$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha & \text{ha } \beta \leq x \leq \beta + 5 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$
valamilyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ számokra. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(X) = F_X\left(\frac{1}{2}\right)$, ahol F_X jelöli az X eloszlásfüggvényét. Határozzuk meg α és β értékét.

3. Egy öt méter oldalhosszúságú, négyzet alakú kertben egy egyenletesen véletlenszerűen választott helyre fát ültetünk. A kertet mind a négy oldaláról kerítés veszi körül. Ha a fa (ültetési pontja) két kerítésvonalhoz is 1 méternél közelebb van, akkor $\frac{1}{3}$ eséllyel lóg át a szomszédhoz a fa valamely ága; míg ha csak egy kerítésvonalhoz van 1 méternél közelebb, akkor $\frac{1}{4}$ eséllyel lóg át. Egyéb esetben $\frac{1}{6}$ eséllyel lóg át a fa a szomszédhoz. Feltéve, hogy átlóg a fa, mi a valószínűsége, hogy a négyzet egyik oldalához sem volt az ültetési pont 1 méternél közelebb?

4. Kutató Kálmán szeretne egy $B\left(12; \frac{1}{3}\right)$ eloszlású X valószínűségi változót használni a kísérletei során. Sajnos a rendelkezésére álló eszközzel csak $Y \sim B\left(n; \frac{1}{2}\right)$ változót tud előállítani (költséghatékonysági megfontolásokból), ahol $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Azt találja ki, hogy X helyett egy $c \cdot Y$ alakú változót fog használni, ahol a c és n paramétereket úgy választja meg, hogy egyrészt az $\mathbb{E}(X - c \cdot Y) = 0$ egyenlet teljesüljön, másrészt az $|\,\mathbb{P}(X > 0) - \mathbb{P}(c \cdot Y > 0)|$ különbség a lehető legkisebb legyen (azaz a két tag közelítőleg egyenlő legyen). Milyen c és n paramétereket kellett választania?

5. Belinda esténként hobbiból meteorokat fotóz, naponta átlagosan 5 darabot. Ha valamelyik napon éppen 7 meteort sikerül lefotóznia (de nem többet), akkor meglepi magát egy új teleszkóppal. Feltehetjük, hogy potenciálisan sok meteor látható az égen, és az egyes meteorokat egymástól függetlenül, azonos, egyenként kis valószínűséggel sikerül lefotóznia. Jelölje Y azt, hogy hanyadik napon sikerül először éppen 7 meteort fotóznia. Mennyi az $\{5 \leq Y < 7\}$ esemény valószínűsége?

6.* A és B játékos felváltva dobnak két szabályos dobókockával, A játékos kezd. Ha az A játékos által az adott körben dobott számok összege 6, akkor ő nyert. Ha a B játékos által az adott körben dobott számok összege 9, akkor ő nyert. Ha két kör után, azaz B játékos második dobása után még nincs győztes, akkor a végeredmény döntetlen. Várhatóan hány dobás történik a játék során?

Tudnivalók: A vizsga időtartama 90 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

Eloszlás neve	Jelölés	$\mathrm{Ran}(X)$	$\mathbb{P}(X=k)$ vagy $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0,1\}$	$p,\ 1-p$		p	$p(1-p)$
binomiális	$\mathrm{B}(n;p)$	$\{0,1,...,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$\{0,1,...\}$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$		λ	λ
geometriai	$\mathrm{Geo}(p)$	$\{1,2,...\}$	$(1-p)^{k-1}p$		$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$\mathrm{U}(a;b)$	$(a;b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$