Zárthelyi dolgozat
Megoldás

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Legyenek A, B és C olyan események, amik teljesítik a következőket: Tegyük fel, hogy C független A-tól, illetve B-től. Továbbá, $A \cap B$ valószínűsége éppen 0,2-vel kisebb, mint B valószínűsége. Emellett tudjuk, hogy $A \cap C$ kizárja B-t, $\mathbb{P}(A) = 0{,}3$ és $\mathbb{P}(C) = 0{,}5$. Határozzuk meg $\mathbb{P}(B)$-t, ha tudjuk, hogy 0,75 annak a valószínűsége, hogy a három közül valamelyik esemény bekövetkezik.

   (2+1 pont) $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$ és $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$ (Ha csak az egyik egyenlet szerepel, 2 pont. Ha függetlenségből levezetett hibás egyenlet is szerepel, legfeljebb 1 pont.)
   (1 pont) $\mathbb{P}(A \cap C) = 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15$
   (1 pont) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - 0{,}2$
   (2 pont) $(A \cap C) \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap C \cap B) = 0$ (Ha csak az utóbbi egyenlet szerepel, arra is jár a pont.)
   (2 pont) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 0{,}75$
   (1 pont) Poincaré-formula alapján:
   (4 pont) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$
   (3 pont) $0{,}75 = 0{,}3 + \mathbb{P}(B) + 0{,}5 - (\mathbb{P}(B) - 0{,}2) - 0{,}15 - 0{,}5 \cdot \mathbb{P}(B) + 0$ (Ha a 7 helyettesíthető tagból legalább 4 be van helyettesítve jól, 2 pont.)
   (1 pont) $0{,}75 = 0{,}85 - 0{,}5 \cdot \mathbb{P}(B)$
   (2 pont) $\mathbb{P}(B) = \underline{\underline{0{,}2}}$

2. A koordinátasíkon jelölje O az origót, P az $(1; 0)$ és Q a $(0; 1)$ pontot. Válasszunk egyenletesen véletlenszerűen egy A pontot az OP szakaszról, és tőle függetlenül egy B pontot az OQ szakaszról.

   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy A és B távolsága kisebb, mint 1?

   (b) A fenti módszer helyett, válasszuk inkább a B pontot az OP és OQ szakaszok uniója által adott L-alakú vonalról (továbbra is egyenletesen véletlenszerűen, függetlenül A választásától az OP szakaszon). Ekkor mennyi a valószínűsége, hogy A és B távolsága kisebb, mint 1?

(1 pont) Jelölje E azt az eseményt, hogy A és B távolsága 1-nél kisebb. Kérdés: $\mathbb{P}(E) =?$
(1 pont) Jelölje X az A pont vízszintes koordinátáját, és Y a B pont függőleges koordinátáját. (Ha a megoldásban más jelöléssel, esetleg ábrán értelmezve van a feladat szövege, szintén jár a pont.)
(2 pont) az eseménytér választható az egységnégyzetnek; ekkor a kedvező kimenetelek halmaza $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.
(Avagy alternatív felírás: $E = \{X^2 + Y^2 < 1\}$)
(2+2 pont) a kedvező kimenetelek egy egység sugarú negyedkört alkotnak (elég ha rajzon szerepel), tehát $\mathbb{P}(E) = \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{0{,}7854}}$
(Avagy, ha valaki inkább számolni szeret: $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin(u)^2} \cdot \cos(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)\,\mathrm{d}u$ $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2u)}{2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{2u+\sin(2u)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$)
(2 pont) A b) feladathoz: jelölje F azt az eseményt, hogy a B pont az OP szakaszra esik, illetve jelölje ismét E azt, hogy A és B távolsága kisebb, mint 1.
(1 pont) $\{F, \overline{F}\}$ teljes eseményrendszer, ezért
(1 pont) a teljes valószínúség tétele szerint
(3 pont) $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \mid F) \cdot \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(E \mid \overline{F}) \cdot \mathbb{P}(\overline{F})$
(2 pont) $\mathbb{P}(F) = \frac{1}{2}$ és $\mathbb{P}(\overline{F}) = \frac{1}{2}$
(2 pont) $\mathbb{P}(E \mid F) = 1$ és az előző feladatrész miatt $\mathbb{P}(E \mid \overline{F}) = \frac{\pi}{4}$
(1 pont) $\mathbb{P}(E) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \underline{\underline{0{,}8927}}$

3. Legyen Y olyan valószínűségi változó, amelynek eloszlásfüggvénye:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } y \le 1 \\ \sqrt{y} - 1 & \text{ha } 1 < y \le 4 \\ 1 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Jelölje Y sűrűségfüggvényét f_Y. Rögzített $\alpha \in \mathbb{R}$ számra, definiáljuk a $g(y) = \alpha \cdot f_Y^3(y)$ függvényt ($y \in \mathbb{R}$). Milyen $\alpha \in \mathbb{R}$ választás esetén lesz g szintén sűrűségfüggvény?

(4 pont) $f_Y = F_Y'$, ahol ez értelmes. (Ha az állítás feltételei nincsenek részletezve, akkor is jár a pont.)
(2+1 pont) $f_Y(y) = \frac{1}{2} \cdot y^{-\frac{1}{2}}$ ha $1 < y \le 4$, és 0 egyébként
(2 pont) $g(y) = \alpha \cdot f_Y^3(y) = \alpha \cdot \frac{1}{8} \cdot y^{-\frac{3}{2}}$ ha $1 < y \le 4$, és 0 egyébként (Az "egyébként" ág hiánya miatt legfeljebb egy lépésnél vonható le pont)
(1 pont) g nemnegatív (ez a megoldás része, mivel a sűrűségfüggvény karakterizációjának ez az első feltétele)
(4 pont) $1 = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\,\mathrm{d}y$
(3 pont) $= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \cdot f_Y^3(y)\,\mathrm{d}y = \alpha \int_1^4 \frac{1}{8} y^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}y$ (Ha az integrálási határok helytelenül szerepelnek, legfeljebb 1 pont.)
(2 pont) $= \frac{\alpha}{8} \left[-2 \cdot y^{-\frac{1}{2}}\right]_1^4 = \frac{\alpha}{8}$
(1 pont) $\Rightarrow \alpha = \underline{\underline{8}}$

4. A Tipszflix nevű oldalon mozifilmek premier heti jegyeladására lehet fogadni. Az 'A' film esetén annak a valószínűsége, hogy pont 1 000 001 jegyet adnak el az első hétre, hétszer akkora, mint hogy épp 1 000 000 jegyet adnak el; ezzel szemben 'Zs' film esetében csak kétszer akkora. Egy adott film premier hetére rengeteg jegyet adhatnak el, továbbá feltehetjük, hogy egymástól függetlenül, azonos, egyenként kis valószínűséggel adnak el egy-egy jegyet. Mekkora a várható értéke az 'A' és 'Zs' filmek összes jegyeladásának az első héten?

(2 pont) Jelölje X az 'A' filmre eladott jegyek számát, és Y a 'B' filmre eladottakat.
(2 pont) $X \sim \text{Pois}(\lambda)$, $Y \sim \text{Pois}(\mu)$ valamilyen λ, μ pozitív valós számokra (indoklás: egymástól független, azonos, kis valószínűségű események közül a sikeres kísérletek száma.)
(1 pont) $\mathbb{P}(X = 1000001) = 7 \cdot \mathbb{P}(X = 1000000)$ illetve $\mathbb{P}(Y = 1000001) = 2 \cdot \mathbb{P}(Y = 1000000)$
(1 pont) $\mathbb{E}(X + Y) =?$
(2 pont) $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$

(2 pont) $7 = \mathbb{P}(X = 1000001)/\,\mathbb{P}(X = 1000000) = \left(\frac{\lambda^{1000001}}{1000001!} \cdot e^{-\lambda}\right)/\left(\frac{\lambda^{1000000}}{1000000!} \cdot e^{-\lambda}\right)$
(2 pont) $= \frac{\lambda}{1000001}$
(1+1 pont) $\Rightarrow \lambda = 7000007$ és hasonlóan $\mu = 2000002$
(3 pont) $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
(2 pont) $X \sim \text{Pois}(\lambda) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = \lambda = 7000007$ és hasonlóan $\mathbb{E}(Y) = \mu = 2000002$
(1 pont) $\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 7000007 + 2000002 = \underline{\underline{9000009}}$

5. Béla fogott egy 52 lapos kártyapaklit (amiben eredetileg nincs joker), és néhány lapot jokerre cserélt. Amikor valaki felhívja telefonon, húz két lapot ebből a pakliból, és ha mindkettő joker, akkor $\frac{1}{2}$ eséllyel felveszi a telefont (minden egyéb körülménytől függetlenül). Ha más lap-párt húz, akkor biztosan nem veszi fel. Ezt minden egyes hívásnál végrehajtja, a paklit minden alkalommal újrakeverve (a húzott lapokat is belekeverve), a jokerek számát és a pakli méretét közben nem változtatva. Hány lapot cserélt jokerre Béla, ha tudjuk, hogy átlagosan 34-szer kell felhívni mire először felveszi?

   (2 pont) X: hanyadszorra veszi fel Béla a telefont
   (2 pont) $\mathbb{E}(X) = 34$
   (2 pont) $X \sim \text{Geo}(p)$ valamilyen $p \in [0, 1]$-re
   (2 pont) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$
   (3 pont) $p = \mathbb{P}(\text{felveszi}) = \mathbb{P}(\text{felveszi} \mid \text{két jokert húz}) \cdot \mathbb{P}(\text{két jokert húz}) = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(\text{két jokert húz})$
   (4 pont) $\mathbb{P}(\text{két jokert húz}) = \binom{k}{2}\Big/\binom{52}{2}$
   (2 pont) $\Rightarrow 34 = \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} = 2 \cdot \binom{52}{2}\Big/\binom{k}{2}$
   (2 pont) $34 \cdot \frac{k(k-1)}{2} = 52 \cdot 51$
   (1 pont) $k = 0{,}5 \pm 12{,}5$, de $k > 0$, ezért $k = \underline{\underline{13}}$

6.* Főhősünk épp egy alkatrészből vásárol 12 darabot. Kétféle márkából választhat: a "TooTee V-tel" alkatrész 0,1 valószínűséggel, míg a "N/A-John Ocho" alkatrész 0,3 valószínűséggel megy tönkre beszereléskor. Nem törődve a részletekkel, főhősünk véletlenszerűen levesz 12 darabot az egyik típusból (azaz csak egyféle típusból vásárol), $\frac{1}{3}$ eséllyel a gyengébb márkát választva. Beszerelés után szomorúan konstantálja, hogy a 12-ből 3 nem működik. Ennek ismeretében, mi a valószínűsége, hogy a jobb minőségű típusból vásárolt?

   (1 pont) $A_0 = \{\text{a jobb minőségű típusból választ}\}$, $A_1 = \{\text{a rosszabb minőségű típusból választ}\}$,
   (1 pont) X beszereléskor elromló alkatrészek száma, $B = \{X = 3\}$
   (2 pont) Kérdés: $\mathbb{P}(A_0 \mid B) =?$
   (1 pont) A_0, A_1 teljes eseményrendszer
   (1 pont) Bayes-tétel:
   (4 pont)
$$\mathbb{P}(A_0 \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_0) \cdot \mathbb{P}(A_0)}{\mathbb{P}(B \mid A_0) \cdot \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(B \mid A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1)}$$
   (Ha az egyszerű Bayes-tételre és a teljes valószínűség tételére külön-külön van hivatkozva, vagy direktben a feltételes valószínűségek kibontásával történik a megoldás, akkor is jár a pont. A felírt egyenletek helyes blokkjaira arányos részpontszám adható.)
   (1 pont) $\mathbb{P}(A_0) = \frac{2}{3}$ és $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{3}$
   (3 pont) $\mathbb{P}(B \mid A_0) = \binom{12}{3} \cdot 0{,}1^3 \cdot (1 - 0{,}1)^9 \approx 0{,}08523$ (hiszen a sikerek száma binomiális eloszlású, ha a siker valószínűsége adott)
   (3 pont) $\mathbb{P}(B \mid A_1) = \binom{12}{3} \cdot 0{,}3^3 \cdot (1 - 0{,}3)^9 \approx 0{,}2397$
   (2 pont) Behelyettesítve:
$$\mathbb{P}(A_0 \mid B) \approx \frac{0{,}08523 \cdot \frac{2}{3}}{0{,}08523 \cdot \frac{2}{3} + 0{,}2397 \cdot \frac{1}{3}}$$
   (1 pont) $\approx \underline{\underline{0{,}4156}}$