Zárthelyi dolgozat

1. Legyenek A, B és C olyan események, amik teljesítik a következőket: Tegyük fel, hogy C független A-tól, illetve B-től. Továbbá, $A \cap B$ valószínűsége éppen 0,2-vel kisebb, mint B valószínűsége. Emellett tudjuk, hogy $A \cap C$ kizárja B-t, $\mathbb{P}(A) = 0{,}3$ és $\mathbb{P}(C) = 0{,}5$. Határozzuk meg $\mathbb{P}(B)$-t, ha tudjuk, hogy 0,75 annak a valószínűsége, hogy a három közül valamelyik esemény bekövetkezik.

2. A koordinátasíkon jelölje O az origót, P az $(1; 0)$ és Q a $(0; 1)$ pontot. Válasszunk egyenletesen véletlenszerűen egy A pontot az OP szakaszról, és tőle függetlenül egy B pontot az OQ szakaszról.

   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy A és B távolsága kisebb, mint 1?

   (b) A fenti módszer helyett, válasszuk inkább a B pontot az OP és OQ szakaszok uniója által adott L-alakú vonalról (továbbra is egyenletesen véletlenszerűen, függetlenül A választásától az OP szakaszon). Ekkor mennyi a valószínűsége, hogy A és B távolsága kisebb, mint 1?

3. Legyen Y olyan valószínűségi változó, amelynek eloszlásfüggvénye:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } y \leq 1 \\ \sqrt{y} - 1 & \text{ha } 1 < y \leq 4 \\ 1 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

   Jelölje Y sűrűségfüggvényét f_Y. Rögzített $\alpha \in \mathbb{R}$ számra, definiáljuk a $g(y) = \alpha \cdot f_Y^3(y)$ függvényt ($y \in \mathbb{R}$). Milyen $\alpha \in \mathbb{R}$ választás esetén lesz g szintén sűrűségfüggvény?

4. A Tipszflix nevű oldalon mozifilmek premier heti jegyeladására lehet fogadni. Az 'A' film esetén annak a valószínűsége, hogy pont 1 000 001 jegyet adnak el az első hétre, hétszer akkora, mint hogy épp 1 000 000 jegyet adnak el; ezzel szemben 'Zs' film esetében csak kétszer akkora. Egy adott film premier hetére rengeteg jegyet adhatnak el, továbbá feltehetjük, hogy egymástól függetlenül, azonos, egyenként kis valószínűséggel adnak el egy-egy jegyet. Mekkora a várható értéke az 'A' és 'Zs' filmek összes jegyeladásának az első héten?

5. Béla fogott egy 52 lapos kártyapaklit (amiben eredetileg nincs joker), és néhány lapot jokerre cserélt. Amikor valaki felhívja telefonon, húz két lapot ebből a pakliból, és ha mindkettő joker, akkor $\frac{1}{2}$ eséllyel felveszi a telefont (minden egyéb körülménytől függetlenül). Ha más lap-párt húz, akkor biztosan nem veszi fel. Ezt minden egyes hívásnál végrehajtja, a paklit minden alkalommal újrakeverve (a húzott lapokat is belekeverve), a jokerek számát és a pakli méretét közben nem változtatva. Hány lapot cserélt jokerre Béla, ha tudjuk, hogy átlagosan 34-szer kell felhívni mire először felveszi?

6.* Főhősünk épp egy alkatrészből vásárol 12 darabot. Kétféle márkából választhat: a "TooTee V-tel" alkatrész 0,1 valószínűséggel, míg a "N/A-John Ocho" alkatrész 0,3 valószínűséggel megy tönkre beszereléskor. Nem törődve a részletekkel, főhősünk véletlenszerűen levesz 12 darabot az egyik típusból (azaz csak egyféle típusból vásárol), $\frac{1}{3}$ eséllyel a gyengébb márkát választva. Beszerelés után szomorúan konstantálja, hogy a 12-ből 3 nem működik. Ennek ismeretében, mi a valószínűsége, hogy a jobb minőségű típusból vásárolt?

Tudnivalók: A vizsga időtartama 90 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

Eloszlás neve	Jelölés	Ran(X)	$\mathbb{P}(X=k)$ vagy $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0,1\}$	$p,\ 1-p$		p	$p(1-p)$
binomiális	$\mathrm{B}(n;p)$	$\{0,1,...,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$\{0,1,...\}$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$		λ	λ
geometriai	$\mathrm{Geo}(p)$	$\{1,2,...\}$	$(1-p)^{k-1}p$		$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$\mathrm{U}(a;b)$	$(a;b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$