Tömegkiszolgálás zárthelyi

2005. április 15.

A megoldásokhoz részletes indoklást kérünk. Minden előadáson elhangzott vagy a jegyzetben megtalálható állítás felhasználható megfelelő hivatkozással.

---

1. feladat. Tekintsük az alábbi átmenetvalószínűség-mátrixszal adott Markov-láncot:

$$\Pi \qquad \begin{matrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Stabil-e a lánc? Ha nem, miért? Ha igen, mi a határeloszlása?

2. feladat. Egy embernek 4 pár cipője van. Minden reggel futni indul otthonából, amelynek két bejárata van. Egyforma valószínűséggel hagyja el a házat az első illetve a hátsó ajtón. Távozás előtt felhúz egy pár cipőt a közvetlenül az ajtó mellett tárolt lábbelik közül. Amennyiben az ajtó mellett nincs cipő, mezítláb indul útjára. Egyenlő eséllyel érkezik vissza az első illetve a hátsó ajtón, s a cipőjét rögtön le is veszi az ajtóban. Hosszú távon az idő hányad részében kénytelen mezítláb futni?

3. feladat. Influenzajárvány miatt egy általános iskolában azon diákok 10%-a, akik ma jól vannak, megbetegedik holnapra, míg a ma beteg diákok fele meggyógyul holnapra. Írjuk fel az egy diák esetét modellező Markov-lánc átmenetvalószínűség-gráfját! Jósoljuk meg, a diákok hány százaléka lesz beteg holnap, ha ma 80%-uk egészséges. Ha egy diák hétfőn beteg, mekkora eséllyel lesz szerdán egészséges?

4. feladat. Milyen p és q esetén lesz a következő átmenetvalószínűség-mátrixszal adott végtelen állapotú Markov-lánc stabil? Adjunk minél jobb elégséges feltételt!

$$\Pi \qquad \begin{matrix} 1\ p\ q & p & q & 0 & 0 & \\ 1\ p\ q & p & q & 0 & 0 & \\ 0 & 1\ p\ q & p & q & 0 & \\ 0 & 0 & 1\ p\ q & p & q & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

5. feladat. Írd fel a Little-formulát, és magyarázd meg a benne szereplő mennyiségeket!