Tömegkiszolgálás—ZH 2002. november 7.

Fontos! Minden megoldáshoz részletes indoklást kérünk. Minden előadáson elhangzott, vagy a jegyzetben megtalálható állítás felhasználható megfelelő hivatkozással.

1. feladat. *Tekintsük a*

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

átmenetmátrixszal megadott Markov-láncot. Mennyi a $\mathbf{P}(X_2 = 3|X_0 = 0)$ *kétlépéses átmenetvalószínűség értéke? Mi lesz az* X_2 *eloszlása, ha* X_0 *eloszlása* $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$*?*

2. feladat. *Stabil-e az előző feladatban adott Markov-lánc? Ha igen, akkor mi a határeloszlása?*

3. feladat. *Mikor nevezünk egy Markov-láncot pozitív visszatérőnek? Pozitív visszatérő-e az 1. feladatban adott Markov-lánc? Add meg a várható visszatérési időket!*

4. feladat. *Közeledvén a tél, az erdő szélén lakó kismókus elhatározza, hogy hozzáfog a diógyűjtéshez. Vidáman ugrándozik a diófán és félpercenként, ha mancsa ügyébe akad egy dió, akkor azt ledobja a fa alá. Ennek a valószínűsége* $\frac{1}{3}$*. Közel s távol egy állatot sem látni, így hát úgy gondolja, ráér majd a nap végén összeszedni a lehajigált diókat. Igen ám, de amint a mókus a gyűjtéshez lát, kidugja a föld alól a fejét a falánk kishörcsög. Ez a kishörcsög ezután is minden egész percben kidugja a fejét, körülnéz, és ha meglát a fa alatt egy diót, azt egy perc alatt jóízűen belakmározza, majd ismét körbenéz újabb finom falat után. Ha nincs dió a fa alatt, akkor a következő percig visszabújik a föld alá. A kismókus minden perc végén lenéz a fa alá, hogy mennyi dió gyűlt már össze, és elgondolkozik azon az érdekességen, hogy a fa alatt gyűlő diók száma vajon Markov-láncot alkot-e. Írd fel a lánc átmenetmátrixát! Stabil-e a lánc? Várhatóan mennyi diót fog látni a kismókus, amikor lenéz?*

5. feladat. *Írd fel a Little-formulát, és magyarázd meg a benne szereplő mennyiségeket! Várhatóan mennyi ideje van hátra az előző feladat egy diójának leesés után, míg a kishörcsög megeszi, ha feltételezzük, hogy a kishörcsög jártas a sorbanállás-elméletben és elhatározza, hogy FIFO rendszer szerint fogyasztja a diókat, azaz amit a kismókus hamarabb dobott le, annak lát neki ő is hamarabb?*