Tömegkiszolgálás—ZH 2001. november 6.

Fontos! Minden megoldáshoz részletes indoklást kérünk. Minden előadáson elhangzott, vagy a jegyzetben megtalálható állítás felhasználható megfelelő hivatkozással.

Feladat 1 *Tekintsük a*

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1-p & p \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 1-q \end{pmatrix}$$

átmenetmátrixszal megadott Markov-láncot. Milyen p és q értékekre lesz stabil? Mi ekkor a határeloszlás?

Feladat 2 *Az előző feladatban legyen $p = \frac{1}{3}$ és $q = \frac{1}{2}$. Mennyi a $\mathbf{P}(X_2 = 1|X_0 = 2)$ kétlépéses átmenetvalószínűség értéke? Mi X_2 eloszlása, ha a Markov-láncot a $P_0 = (1, 0, 0)$ eloszlásból indítjuk?*

Feladat 3 *Mikor nevezünk egy Markov-láncot nulla visszatérőnek? Tegyük fel, hogy az 1. feladatban p és q értékét úgy választottuk, hogy a Markov-lánc stabil. Igaz-e, hogy ebben az esetben az 1-es állapot nulla viszsatérő? Mekkora az m_1 várható visszatérési idő?*

Feladat 4 *Milyen p és q esetén lesz a következő átmenetvalószínűség-mátrixszal adott végtelen állapotú Markov-lánc stabil?*

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1-p-q & p & q & 0 & 0 & \dots \\ 1-p-q & p & q & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1-p-q & p & q & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1-p-q & p & q & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Feladat 5 *Tegyük fel, hogy egy vírus N különböző mutációban fordulhat elő. Minden egyes generáció vagy megmarad az eredeti mutációban $1-\alpha$ valószínűséggel, vagy α valószínűséggel egy másik mutációba alakul át. Az utóbbi esetben az új mutáció véletlenszerűen, egyenletes eloszlás szerint választódik ki a többi $N-1$ lehetséges változat közül. Mi a valószínűsége annak, hogy az n-edik generáció ugyanaz a mutáció, mint a kezdeti?*