Tömegkiszolgálás—ZH 2001. április 9.

Fontos! Minden megoldáshoz részletes indoklást kérünk. Minden előadáson elhangzott, vagy a jegyzetben megtalálható állítás felhasználható megfelelő hivatkozással.

Feladat 1 *Tekintsük a*

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

átmenetvalószínűség-mátrixszal adott bináris Markov-láncot, ahol $0 < p < 1$, $0 < q < 1$. *Számítsd ki a következő mennyiségeket:* $f_{00}^{(n)}$, $f_{11}^{(n)}$, $m_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^{(n)}$, $m_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}^{(n)}$.

Feladat 2 *Tekintsük a*

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

átmenetvalószínűség-mátrixszal megadott Markov-láncot. Mennyi a $\mathbf{P}(X_3 = 2 | X_0 = 1)$ *háromlépéses átmenetvalószínűség értéke?*

Feladat 3 *Tekintsük az* $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1} + Y_{n+1})^+$ *rekurzióval adott sorozatot. Milyen feltételekkel lesz ez Markov-lánc, mikor lesz homogén és mikor lesz stabil?*

Feladat 4 *Legyen* $\{X_n\}$ *Markov-lánc* Π *átmenetvalószínűség-mátrixszal. Legyen* $Y_n = X_{kn}$. *Bizonyítsd be, hogy* $\{Y_n\}$ *is Markov-lánc és számítsd ki az átmenetvalószínűség-mátrixát!*

Feladat 5 *Egy diák 3 könyvet tart a polcán. Minden reggel véletlenszerűen kiválaszt egy könyvet a három közül, függetlenül a korábbi választásaitól. Annak a valószínűsége, hogy az* i*-edik könyvet választja* α_i, *ahol* $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, 2, 3$. *Minden este a könyvet visszateszi a polc elejére. Jelöljük* p_n*-nel annak valószínűségét, hogy az* n*-edik reggelen a diák a könyveit az* $1, 2, 3$ *sorrendben találja. Add meg a* p_n *valószínűséget* $n \to \infty$ *esetén!*