Tömegkiszolgálás—ZH 2000. november 6.

Fontos! Minden megoldáshoz részletes indoklást kérünk. Minden előadáson elhangzott, vagy a jegyzetben megtalálható állítás felhasználható megfelelő hivatkozással.

Feladat 1 *Tekintsük a*

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

átmenetmátrixszal megadott Markov-láncot. Mi lesz az X_2 eloszlása, ha X_0 eloszlása $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$?

Feladat 2 *Irreducibilis-e az alábbi átmenetmátrixszal megadott Markov-lánc? Aperiodikus-e?*

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & q & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

ahol $p \neq 0$, $q \neq 0$, $p + q = 1$.

Feladat 3 *Nagyesze professzor a vizsgaidőszak egy adott percében p valószínűséggel beír egy jegyet egy indexbe, $1 - p$ valószínűséggel pedig a titkárnőjének udvarol. Legyen q annak a valószínűsége, hogy egy adott percben egy újabb jegyre éhes hallgató érkezik a professzorhoz ($1 - q$ valószínűséggel nem érkezik senki). Írd fel a professzor szobája előtt tekergő sor hosszára vonatkozó átmenetmátrixot! Milyen p és q értékek mellett lesz a Markov-lánc stabil?*

Feladat 4 *Legyen az előző feladatban $p = 0.5$ és $q = 0.4$. Tegyük fel, hogy a professzor szobájába maximum 4 hallgató fér be, és a szoba előtt nem folytatódhat a sor, mert a dékán úr egy nemrég közreadott rendelete szerint tilos az egyetem közterületein jegyre várakozni. Stacionárius eloszlást feltételezve, mi annak a valószínűsége, hogy az újonnan érkező diák nem fér be a professzor szobájába s kénytelen később visszajönni?*

Feladat 5 *Mikor nevezünk egy Markov-láncot pozitív visszatérőnek?*