Példasor a „Tömegkiszolgálás informatikai rendszerekben” című tárgyhoz

Összeállította: Rácz András

A *-gal megjelölt példák kicsit bonyolultabbak vagy időigényesek.

1. Diszkrét idejű Markov láncok

1. feladat. *Tekintsük az $\{X_n\}$ diszkrét Markov láncot az $S = \{1, 2\}$ állapottéren és az alábbi állapotátmeneti mátrixszal*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

Ha $\alpha, \beta > 0$, add meg az n-edik lépés utáni állapoteloszlást és mutasd meg, hogy létezik határeloszlás!

2. feladat. *Legyen i és j egy diszkrét idejű Markov lánc két állapota. Bizonyítsd be, hogy ha i és j egymásból kölcsönösen elérhető, vagyis $\exists n \geq 0, p_{ij}^{(n)} > 0$ és $\exists m \geq 0, p_{ji}^{(m)} > 0$, akkor pozitív annak a valószínűsége, hogy i-ből elérjük a j-t anélkül, hogy közben visszatérnénk i-be.*

3. feladat.* *Bizonyítsd be, hogy ha a lánc irreducibilis és visszatérő, akkor annak a valószínűsége, hogy i-ből indulva valaha is elérünk j-be 1-gyel egyenlő!*

4. feladat. *Milyen a, b számokra lesz a következő átmenetvalószínűség-mátrixszal adott végtelen állapotú Markov lánc stabil?*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1-a-b & a & b & 0 & 0 & \dots \\ 1-a-b & a & b & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1-a-b & a & b & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1-a-b & a & b & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Legyen $a = 0$ és $b = 1/4$. Mi ekkor a határeloszlás?

5. feladat. *Tegyük fel, hogy egy autót 0.5 valószínűséggel mosnak le egy adott percben (ugyanekkora valószínűséggel egyet sem mosnak le). Legyen 0.6 annak a valószínűsége, hogy egy adott percben nem érkezik új autó az autómosóba és 0.4 valószínűséggel egy autó érkezik. Stacionárius eloszlást feltéve mi a valószínűsége annak, hogy nem tudok beállni az autómosóba, ha ott az éppen mosott autóval együtt csak három autó várakozhat.*

6. feladat. *Tekintsük az $X_{n+1} = X_n + W_{n+1}$ mod 4 egyenlet által megadott $\{X_n\}$ Markov láncot, ahol a W_n sorozat egymástól és X_0-tol független, azonos eloszlású, nemnegatív, egész értékű valószínűségi változókból áll (ciklikus bolyongás). W_n milyen eloszlása esetén lesz $\{X_n\}$ stabil és mi lesz $\{X_n\}$ határeloszlása?*

7. feladat. *Tekintsük az adott átmenet mátrixú láncot.*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) *Irreducibilis-e a lánc?*

(b) *Aperiodikus-e a lánc?*

(c) *Pozitív visszatérő-e a lánc?*

8. feladat. *Legyen a Markov lánc átmeneti mátrixa a következő:*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tegyük fel, hogy X_0 eloszlása $(0, 1, 0)$. Mi lesz az X_3 eloszlása?

9. feladat. *Tekintsük a következő játékot. Ha i Ft-ja van a játékosnak $(0 < i < N)$, akkor p valószínűséggel nyer 1 Ft-ot, és $1 - p$ valószínűséggel veszít 1 Ft-ot $(0 < p < 1)$. Ha 0 Ft-ja van, akkor $1 - p$ valószínűséggel nem változik a pénze és p valószínűséggel nyer 1 Ft-ot. Ha N Ft-ja van, akkor p valószínűséggel nem változik a vagyona, és $1 - p$ valószínűséggel veszít 1 Ft-ot. Írd fel az átmeneti mátrixot! A Markov lánc stabil-e? Ha igen, akkor add meg a határeloszlást! Ha nem, akkor indokold meg, hogy miért nincs határeloszlás!*

10. feladat. *Tekintsük a három állapottal rendelkező Markov láncot, melynek átmeneti mátrixa*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Tegyük fel, hogy a lánc kiindulási állapotának eloszlása: $\mathbf{P}\{X_0 = 1\} = 0.7$, $\mathbf{P}\{X_0 = 2\} = 0.2$, $\mathbf{P}\{X_0 = 3\} = 0.1$. Mi lesz X_1 eloszlása?

11. feladat. *Döntsd el, hogy a megadott átmeneti mátrixszal rendelkező Markov lánc*

(a) *irreducibilis-e?*

(b) *aperiodikus-e?*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ q & 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

ahol $p \neq 0,\ q \neq 0,\ p + q = 1$.

12. feladat. *Bizonyítsd be, hogy az aperiodikusság öröklődő tulajdonság irreducibilis láncok esetén!*

13. feladat. *Legyen* $X_1, \ldots X_n, \ldots$ *független azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata,* $\mathbf{P}\{X_n = 0\} = 1/2$, $\mathbf{P}\{X_n = 1\} = 1/2$ *eloszlással. Legyen* $Y_n = X_1 + \ldots + X_n$. *Bizonyítsd be, hogy* $\{Y_n\}$ *Markov tulajdonságú!*

14. feladat. *Tekintsük a következő* π *átmenetmátrix által megadott Markov láncot.*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Stabil-e ez a lánc?

15. feladat. *Tekintsük a következő átmenetmátrix által megadott Markov láncot.*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Pozitív visszatérő-e?

16. feladat. *Ha tegnap esett az eső, akkor legyen* α *annak a valószínűsége, hogy ma is esni fog. Ha tegnap nem esett akkor annak a valószínűsége, hogy ma esni fog legyen* β. *Számítsd ki az eső valószínűségének határeloszlását!*

17. feladat. *Tegyük fel, hogy egy áruházban egy bizonyos árucikkre a heti kereslet független azonos eloszlású valószínűségi változó, a következő eloszlással*

$$\mathbf{P}\{\textit{heti kereslet} = j\} = a_j \quad j \geq 0.$$

Tegyük fel, hogy az áruház a következő (s, S) *rendszer szerint rendel hetente új árut. Ha a hét elején az árukészlet legalább* s, *akkor nem rendelnek; míg ha ennél kevesebb akkor pontosan annyit rendelnek, hogy* S*-re föltöltsék az árukészletet. Vagyis, ha a készlet* x, *akkor a rendelés*

$$\begin{cases} 0, & \text{ha } x \geq s \\ S - x, & \text{ha } x < s \end{cases}$$

Azok a vásárlói igények, amelyeket nem tudnak azonnal kielégíteni, elvesznek. Jelöljük X_n*-nel az árukészletet az* n*-edik hét végén és az* n*-edik héten a vásárlói igényt* γ_n*-nel. Add meg* X_n *állapotátmeneti mátrixát!*

18. feladat. (Random walk)
Tekintsük a következő állapotátmeneti mátrixszal adott végtelen állapotú Markov láncot (véletlen bolyongás): $p_{i,i-1} = p,\ p_{i,i+1} = q = 1 - p\ \forall i \geq 1,\ p_{0,0} = p,\ p_{0,1} = q = 1 - p.$
Bizonyítsd be az alábbi állításokat:

(a) *az állapotok nem visszatérők, ha* $p \neq \frac{1}{2}$

(b) *az állapotok nulla-visszatérők, ha* $p = \frac{1}{2}$

19. feladat.* (Doubly stochastic) *Egy átmenetvalószínűségi mátrixot duplán sztochasztikusnak nevezünk, ha az oszlopok összege is 1-et ad, vagyis* $\sum_i p_{ij} = 1\ \forall j \in S$.

(a) *Bizonyítsd be, hogy egy véges állapotú duplán sztochasztikus állapotátmeneti mátrix esetén minden állapot pozitív visszatérő.*

(b) *Bizonyítsd, hogy egy végtelen állapotú irreducibilis, duplán sztochasztikus lánc esetén vagy minden állapot nulla visszatérő vagy nem-visszatérő.*

20. feladat.* *Add meg egy* M *véges állapotú, irreducibilis, aperiodikus és duplán sztochasztikus Markov lánc határeloszlását!*

21. feladat. (Virus mutation)
Tegyük fel, hogy egy vírus N *különböző mutációban fordulhat elő. Minden egyes generáció vagy megmarad az eredeti mutációban* $1-\alpha$ *valószínűséggelvagy* α *valószínűséggel egy másik mutációba alakul át. Mi a valószínűsége annak, hogy az* n*-edik generáció ugyanaz a mutáció mint a kezdeti?*

22. feladat. *Legyen* $\{X_n\}$ *Markov lánc* Π *átmenetvalószínűség mátrixszal. Bizonyítsd be, hogy ha* $Y_n = X_{kn}$ *akkor* $\{Y_n\}$ *is Markov lánc* Π^k *átmenetvalószínűségmátrixszal.*

23. feladat.* *Legyen* X_0 *valószínűségi változó, amely értékeit egy megszámlálható* I *halmazból veszi. Legyen* $Y_1, Y_2, \ldots$ *független, a* $[0,1]$ *intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók sorozata. Tekintsük adottnak a következő* G *függvényt:*

$$G : I \times [0,1] \to I,$$

és definiáljuk X_n*-et a következő rekurzió szerint:*

$$X_{n+1} = G(X_n, Y_{n+1}).$$

Bizonyítsd be, hogy $\{X_n\}$ *Markov lánc és fejezd ki a* Π *átmenetvalószínűségi mátrixszot* G *segítségével!*

24. feladat. *Legyenek* $Z_0, Z_1, \ldots$ *független azonos eloszlású valószínűségi változók, úgy hogy* $\mathbf{P}\{Z_i = 1\} = p$, $\mathbf{P}\{Z_i = 0\} = 1 - p$. *Legyen* $S_0 = 0$, $S_n = Z_1 + \ldots + Z_n$. *Állapítsd meg az alábbiak közül mely esetekben lesz* X_n *Markov lánc. Azokban az esetekben ahol* X_n *Markov lánc, add meg az állapotteret és az átmenetvalószínűségi mátrixot. Egyébként pedig mutass példát arra, hogy* $\mathbf{P}\{X_{n+1} = i | X_n = j, X_{n-1} = k\}$ *nem független* k*-tól.*

(a) $X_n = Z_n$

(b) $X_n = S_n$

(c) $X_n = S_0 + \ldots + S_n$

(d) $X_n = (S_n, S_0 + \ldots + S_n)$

25. feladat. *Egy bolha egy háromszög csúcspontjain ugrál, úgy hogy minden lehetséges ugrásnak ugyanakkora a valószínűsége. Mi annak a valószínűsége, hogy az* n*-edik lépés után ugyanott lesz ahonnan indult?*
Hogyan alakul ez a valószínűség, hogy ha a bolha kétszer akkora valószínűséggel ugrik az óramutató járásával megegyező irányba, mint azzal ellentétesen?

26. feladat.* *Egy szerencsejátékos 2 dollárral kezd játszani és a legrövidebb idő alatt el akarja érni, hogy 10 dollárra növelje vagyonát. A játékszabály a következő. Egy szabályos érmét dobunk föl és a játékosunk el kell találja, hogy fej vagy írás lesz-e a dobásból. Ha eltalálta akkor nyer annyi pénzt amekkora a tétje volt (és természetesen a föltett pénzt is visszakapja), ellenkező esetben elveszti a tétjét. A játékos a következő stratégiát választja. Mindaddig amíg 5 vagy annál kevesebb dollárja van az egészet fölteszi, különben pedig csak annyit tesz föl amennyi nyerése eseten épp arra elegendő, hogy pont 10 dollárja legyen.*
Bizonyítsd be, hogy a szerencsejátékos 1/5 valószínűséggel fogja elérni célját!

27. feladat.* *Legyen* $\{X_n\}$ *végtelen állapotú Markov lánc a* $\{0,1\ldots\}$ *állapottéren az alábbi állapotátmeneti valószínűségekkel:*

$$p_{01}=1,\quad p_{i,i+1}+p_{i,i-1}=1,\quad p_{i,i+1}=\left(\frac{i+1}{i}\right)^2 p_{i,i-1},\quad i\geq 1.$$

Mutasd meg, hogy ha $X_0=0$*, akkor annak a valószínűsége, hogy* $X_n\geq 1\ \forall\ n\geq 1$*,* $6/\pi^2$.

28. feladat. *Az alábbi állapotátmeneti mátrixszal adott Markov lánc esetén mely állapotok lesznek visszatérők és melyek nem visszatérők?*

$$\mathbf{\Pi}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

29. feladat.* *Tegyük fel, hogy egy kocka csúcsain lépegetünk az alábbi szabály szerint. Egy adott csúcsból a szomszédos 3 csúcs bármelyikébe egyenlő valószínűséggel lépünk, függetlenül a korábbi lépésektől. Legyen* i *a kezdeti csúcs és* o *az* i*-vel szemközti csúcs. Számítsd ki az alábbi mennyiségeket:*

(a) *az átlagos lépésszám amíg visszatérünk* i*-be*

(b) *az* o *csúcs érintésének átlagos száma amíg először visszatérünk* i*-be*

(c) *az átlagos lépésszám amíg először elérünk* o*-ba*

30. feladat. *Egy diák 3 könyvet tart a polcán. Minden reggel véletlenszerűen kiválaszt egy könyvet a három közül, függetlenül korábbi választásaitól. Annak a valószínűsége, hogy az* i*-edik könyvet választja* α_i*, ahol* $0<\alpha_i<1$*,* $i=1,2,3$*. Minden este a könyvet visszateszi a polc elejére. Jelöljük* p_n*-nel annak a valószínűségét, hogy az* n*-edik reggelen a diák a könyveit az 1,2,3 sorrendben találja. Add meg a* p_n *valószínűséget* $n\to\infty$ *esetén.*

31. feladat. *Tegyük fel, hogy van* N *darab esernyőnk, amelyeknek egy részét otthon egy másik részét a munkahelyünkön tartjuk. Minden reggel elmegyünk a munkahelyünkre. Ha esik az eső, és van otthon ernyőnk, akkor magunkkal viszünk egy ernyőt. Ugyanígy, ha este elindulunk haza, és esik az eső, és van ernyőnk a munkahelyen, akkor magunkkal viszünk egyet. Ha nem esik az eső, akkor nem viszünk magunkkal ernyőt. Hosszú időre tekintve mi a valószínűsége annak, hogy elázunk, feltéve hogy minden indulásunkkor* p *valószínűséggel esik az eső függetlenül a korábbi időjárástól.*

32. feladat.* *Egy operaénekesnő minden este koncertet kellene adjon. Minden este a fellépés után 1/2 valószínűséggel visszavonul, és a további estéken mindaddig nem lép fel újra, amíg a managere ki nem engeszteli. Ezt a manager úgy próbálja elérni, hogy minden nap virágot küld az énekesnőnek mindaddig, amíg az vissza nem tér. Ha x ezer dollárért vásárolt már virágot az $\sqrt{x}$ valószínűséggel fogja kiengeszteli az énekesnőt. Ha a manager minden koncerten 750 dollárt keres, mennyi pénzt érdemes virágra költenie?*

33. feladat. *Bizonyítsd be, hogy minden független növekményű folyamat Markov folyamat!*

34. feladat. *Legyen $Y_{1,n}, Y_{2,n}, \ldots, Y_{n,n}$ n független a $(0,t)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Legyen $Z_n = \min(Y_{1,n}, Y_{2,n}, \ldots, Y_{n,n})$.*

(a) *Add meg a $\mathbf{P}\{Z_n > x\}$ valószínűséget.*

(b) *Legyen t egy függvénye n-nek, úgy hogy $\lim_{n\to\infty} n/t = \lambda$. Bizonyítsd be, hogy $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{Z_n > x\} = e^{-\lambda x}$.*

35. feladat.* *Tekintsük az alábbi állapotátmeneti mátrixszal adott Markov láncot*

$$P_{i,i+1} = p_i, \quad P_{i,i-1} = q_i = 1 - p_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

ahol $p_0 = 1$. Bizonyítsd be, hogy a lánc pozitív visszatérő akkor és csak akkor, ha

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_0 \cdots p_j}{q_1 \cdots q_{j+1}} < \infty$$

36. feladat. *Tekintsünk egy szerencsejátékost, aki minden egyes játék alkalmával p valószínűséggel nyer 1 dollárt és $q = 1 - p$ valószínűséggel veszít 1 dollárt. Ha az egymást követő játékok egymástól függetlenek, mi annak a valószínűsége, hogy i dollárral indulva a játékosnak N dollárja lesz? (Természetesen úgy, hogy közben a vagyona egyszer sem csökken 0-ra).*

37. feladat. *N darab fehér és N darab fekete golyó van szétosztva két urnába úgy, hogy mindegyikben pontosan N darab golyó van. Definiáljuk a rendszer állapotát a következőképpen. Az i-edik állapot ($i = 0, 1 \ldots, N$) jelentse azt, hogy az első urnában i darab fekete golyó van. Minden lépesben egy-egy golyót húzunk az első illetve a második urnából. Azt a golyót amelyiket az első urnából húztunk a második urnába tesszük vissza, míg a másodikból húzottat az elsőbe tesszük. Add meg a p_{ij} állapotátmeneti valószínűségeket!*

38. feladat. *Tekintsük a következő állapotátmeneti valószínűségekkel adott Markov láncot a $0, 1, 2, \ldots$ végtelen állapottéren.*

$$P_{0,i} = P_i > 0, \quad \sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1, \quad \sum_{i=0}^{\infty} i P_i < \infty$$

$$P_{i,i-1} = 1 \quad (i \geq 1)$$

Mutasd meg, hogy a lánc irreducibilis, aperiodikus, pozitív visszatérő és add meg a stacionárius eloszlását!

39. feladat. *Dobjunk egy szabályos dobókockával n-szer egymás után és tegyük fel, hogy a dobások egymástól függetlenek. Legyen X_n az összege az n dobás során kapott értékeknek. Számítsd ki a következő határértéket*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{X_n \text{ osztható 13-mal}\}.$$

40. feladat. *Bizonyítsd be, hogy tetszőleges véges állapotú Markov láncnak nincs nulla visszatérő állapota, és nem lehet az összes állapota nem visszatérő!*

2. Folytonos idejű Markov láncok

41. feladat. *Tegyük fel, hogy bizonyos események λ paraméterű Poisson folyamat szerint generálódnak. A feladatunk az, hogy számoljuk a jelen időpontig bekövetkezett események számát. Azonban minden egyes bekövetkezett eseményt csak p valószínűséggel veszünk észre és számolunk meg. Bizonyítsd be, hogy ez a számoló folyamat Poisson folyamat λp paraméterrel!*

42. feladat. *Legyen $\{N(t), t \geq 0\}$ egy λ paraméterű Poisson folyamat. Számítsd ki a $\mathbf{E}\{N(t)N(t+s)\}$ mennyiséget!*

43. feladat. *Legyen $\{N_1(t), t \geq 0\}$ és $\{N_2(t), t \geq 0\}$ két független Poisson folyamat λ_1 és λ_2 paraméterekkel. Mutasd meg, hogy $\{N_1(t) + N_2(t), t \geq 0\}$ is egy Poisson folyamat $\lambda_1 + \lambda_2$ paraméterrel.*
Bizonyítsd be azt is, hogy annak a valószínűsége, hogy az $\{N_1(t) + N_2(t), t \geq 0\}$ összetett folyamat első bekövetkező eseménye $\{N_1(t), t \geq 0\}$-től származik $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$, függetlenül az első esemény bekövetkeztének időpontjától.

44. feladat. *A 43. feladatban add meg annak a valószínűséget, hogy $N_1(t)$ eléri n-et mielött még $N_2(t)$ elérné m-et!*

45. feladat. *Legyen $\{N(t), t \geq 0\}$ egy λ paraméterű Poisson folyamat és Y legyen egy pozitív, $\{N(t), t \geq 0\}$-től független valószínűségi változó. Számítsd ki $\mathbf{E}\{N(Y)\}$ és $\boldsymbol{\sigma}^2\{N(Y)\}$ mennyiségeket!*

46. feladat. *Tegyük fel, hogy a vevők egy λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek az üzletbe. Végtelen sok kiszolgáló van és a kiszolgálási idő exponenciális eloszlású μ paraméterrel. Mutasd meg, hogy a t-edik időpillanatban az üzletben lévő vevők száma $Q(t)$ egy születési-halálozási folyamatot alkot. Add meg $Q(t)$ határeloszlását!*