Tömegkiszolgálás—Zárthelyi 2002. április 15.

Megoldás

Feladat 1

A határeloszlás — amennyiben létezik — a $P = P\Pi$ egyenlet megoldása. Először tehát ellenőrizni kell, hogy stabil-e a Markov-lánc, határeloszlás csak abban az esetben létezik. Véges álapotú lánc esetén a stabilitás elégséges feltétele, ha a lánc irreducibilis és aperiodikus.
Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a Markov-lánc mindkét tulajdonsággal rendelkezik: bármely állapotból bármelyik másik elérhető pozitív valószínűséggel (látszik pl felrajzolva az átmenetvalószínűség-gráfot, bolyongás visszaverő falak esetén). Aperiodikus a lánc, mert létezik aperiodikus állapota, pl a 0-ás állapot, ahol helyben tudunk maradni, és irreducibilitás esetén az aperiodikusság öröklődik. Tehát stabil a lánc, létezik határeloszlás.
Négy álapotú a Markov-lánc, tehát négy valószínűséget keresünk ($P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$), amelyekre azon kívül, hogy megoldják a $P = P\Pi$ egyenletet, teljesülnie kell még, hogy az összegük 1 ($p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$), hiszen eloszlásról van szó. Megoldva az egyenletrendszert, a határeloszlás: $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Feladat 2

Egy rekurzióval adott sorozatról van szó, amely akkor lesz Markov-lánc (ld. 1.1.1. tétel), ha teljesül, hogy az $\{Y_n\}$ független valószínűségi változók sorozata, illetve, ha $\{Y_n\}$ a kiinduló állapottól, X_0-tól is független. Homogén lesz a lánc, ha $\{Y_n\}$ ráadásul még azonos eloszlású is.
A stabilitáshoz vegyük észre, hogy ez tulajdonképpen egy evolúciós egyenlettel adott Markov-lánc, amiről tudjuk, hogy mikor stabil (ld. 2.1.1. tétel). Jelen esetben a stabilitás feltétele, hogy $\mathbf{E}(1 - Y_n) > 0$, azaz $\mathbf{E}(Y_n) < 1$, illetve, az irreducibilitást és aperiodikusságot biztosítandó kell még, hogy $\mathbf{P}(Y_n = 0) > 0$, $\mathbf{P}(Y_n = 1) > 0$ és $\mathbf{P}(Y_n = 2) > 0$. Így az átmenetmátrix főátlójában és mellékátlóiban nemnegatív elemek állnak.

Feladat 3

Annak a valószínűsége, hogy a Markov-lánc helyben marad az i. állapotában p_{ii}, míg egy másik állapotba való átlépés valószínűsége $1 - p_{ii}$.
Tehát $\mathbf{P}$(x lépésen keresztül marad i-ben) $= \mathbf{P}$(az $x+1$. lépésben hagyja el i-t) $= p_{ii}^x(1 - p_{ii})$.
Vagyis $1 - p_{ii}$ paraméterű geometriai eloszlású a helybenmaradás ideje.

Feladat 4

A sorhossz a pufferben legfeljebb eggyel nő vagy csökken.
Ha üres a sor, akkor $\mathbf{P}$(nő) $= \mathbf{P}$(jött új igény) $= \frac{1}{3}$, $\mathbf{P}$(helyben marad) $= 1 - \mathbf{P}$(nő) $= \frac{2}{3}$.
Ha van várakozó igény és nincs tele a sor, akkor $\mathbf{P}$(nő) $= \mathbf{P}$(nem állt rendelkezésre a csatorna)$\mathbf{P}$(jött új igény) $= \frac{3}{4}\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}$(csökken) $= \mathbf{P}$(rendelkezésre állt a csatorna)$\mathbf{P}$(nem jött új igény) $= \frac{1}{4}\frac{2}{3} = \frac{1}{6}$, $\mathbf{P}$(helyben marad) $= 1 - \mathbf{P}$(nő) $- \mathbf{P}$(csökken) $= \frac{7}{12}$.
Ha tele van a sor, akkor $\mathbf{P}$(csökken) $= \mathbf{P}$(rendelkezésre állt a csatorna)$\mathbf{P}$(nem jött új igény) $= \frac{1}{4}\frac{2}{3} = \frac{1}{6}$, $\mathbf{P}$(helyben marad) $= 1 - \mathbf{P}$(csökken) $= \frac{5}{6}$.

Tehát az átmenetvalószínűség-mátrix:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Feladat 5

Egy Markov-lánc visszatérő, ha minden állapota visszatérő. Az i állapot visszatérő, ha $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1$, ahol $f_{ii}^{(n)}$ annak a valószínűsége, hogy i-ből indulva először pontosan n lépés után ér vissza a lánc i-be (azaz $f_{ii}^{(n)} = \mathbf{P}(X_n = i, X_k \neq i, 1 \leq k < n | X_0 = i)$).