# Példasor a „Tömegkiszolgálás informatikai rendszerekben” című tárgyhoz

Összeállította: Rácz András

A *-gal megjelölt példák kicsit bonyolultabbak vagy időigényesek.

## 1. Diszkrét idejű Markov láncok

**1. feladat.** *Tekintsük az $\{X_n\}$ diszkrét Markov láncot az $S = \{1, 2\}$ állapottéren és az alábbi állapotátmeneti mátrixszal*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

*Ha $\alpha, \beta > 0$, add meg az $n$-edik lépés utáni állapoteloszlást és mutasd meg, hogy létezik határeloszlás!*

**2. feladat.** *Legyen $i$ és $j$ egy diszkrét idejű Markov lánc két állapota. Bizonyítsd be, hogy ha $i$ és $j$ egymásból kölcsönösen elérhető, vagyis $\exists n \geq 0, p_{ij}^{(n)} > 0$ és $\exists m \geq 0, p_{ji}^{(m)} > 0$, akkor pozitív annak a valószínűsége, hogy $i$-ből elérjük a $j$-t anélkül, hogy közben visszatérnénk $i$-be.*

**3. feladat.*** *Bizonyítsd be, hogy ha a lánc irreducibilis és visszatérő, akkor annak a valószínűsége, hogy $i$-ből indulva valaha is elérünk $j$-be 1-gyel egyenlő!*

**4. feladat.** *Milyen $a, b$ számokra lesz a következő átmenetvalószínűség-mátrixszal adott végtelen állapotú Markov lánc stabil?*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1-a-b & a & b & 0 & 0 & \dots \\ 1-a-b & a & b & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1-a-b & a & b & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1-a-b & a & b & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

*Legyen $a = 0$ és $b = 1/4$. Mi ekkor a határeloszlás?*

**5. feladat.** *Tegyük fel, hogy egy autót 0.5 valószínűséggel mosnak le egy adott percben (ugyanekkora valószínűséggel egyet sem mosnak le). Legyen 0.6 annak a valószínűsége, hogy egy adott percben nem érkezik új autó az autómosóba és 0.4 valószínűséggel egy autó érkezik. Stacionárius eloszlást feltéve mi a valószínűsége annak, hogy nem tudok beállni az autómosóba, ha ott az éppen mosott autóval együtt csak három autó várakozhat.*

**6. feladat.** *Tekintsük az $X_{n+1} = X_n + W_{n+1}$ mod 4 egyenlet által megadott $\{X_n\}$ Markov láncot, ahol a $W_n$ sorozat egymástól és $X_0$-tol független, azonos eloszlású, nemnegatív, egész értékű valószínűségi változókból áll (ciklikus bolyongás). $W_n$ milyen eloszlása esetén lesz $\{X_n\}$ stabil és mi lesz $\{X_n\}$ határeloszlása?*

**7. feladat.** *Tekintsük az adott átmenet mátrixú láncot.*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) *Irreducibilis-e a lánc?*

(b) *Aperiodikus-e a lánc?*

(c) *Pozitív visszatérő-e a lánc?*

**8. feladat.** *Legyen a Markov lánc átmeneti mátrixa a következő:*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Tegyük fel, hogy* $X_0$ *eloszlása* $(0, 1, 0)$. *Mi lesz az* $X_3$ *eloszlása?*

**9. feladat.** *Tekintsük a következő játékot. Ha* $i$ *Ft-ja van a játékosnak* $(0 < i < N)$, *akkor* $p$ *valószínűséggel nyer 1 Ft-ot, és* $1 - p$ *valószínűséggel veszít 1 Ft-ot* $(0 < p < 1)$. *Ha 0 Ft-ja van, akkor* $1 - p$ *valószínűséggel nem változik a pénze és* $p$ *valószínűséggel nyer 1 Ft-ot. Ha* $N$ *Ft-ja van, akkor* $p$ *valószínűséggel nem változik a vagyona, és* $1 - p$ *valószínűséggel veszít 1 Ft-ot. Írd fel az átmeneti mátrixot! A Markov lánc stabil-e? Ha igen, akkor add meg a határeloszlást! Ha nem, akkor indokold meg, hogy miért nincs határeloszlás!*

**10. feladat.** *Tekintsük a három állapottal rendelkező Markov láncot, melynek átmeneti mátrixa*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

*Tegyük fel, hogy a lánc kiindulási állapotának eloszlása:* $\mathbf{P}\{X_0 = 1\} = 0.7$, $\mathbf{P}\{X_0 = 2\} = 0.2$, $\mathbf{P}\{X_0 = 3\} = 0.1$. *Mi lesz* $X_1$ *eloszlása?*

**11. feladat.** *Döntsd el, hogy a megadott átmeneti mátrixszal rendelkező Markov lánc*

(a) *irreducibilis-e?*

(b) *aperiodikus-e?*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ q & 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

*ahol* $p \neq 0,\ q \neq 0,\ p + q = 1.$

**12. feladat.** *Bizonyítsd be, hogy az aperiodikusság öröklődő tulajdonság irreducibilis láncok esetén!*

**13. feladat.** *Legyen $X_1, \dots X_n, \dots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, $\mathbf{P}\{X_n = 0\} = 1/2$, $\mathbf{P}\{X_n = 1\} = 1/2$ eloszlással. Legyen $Y_n = X_1 + \dots + X_n$. Bizonyítsd be, hogy $\{Y_n\}$ Markov tulajdonságú!*

**14. feladat.** *Tekintsük a következő $\pi$ átmenetmátrix által megadott Markov láncot.*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Stabil-e ez a lánc?*

**15. feladat.** *Tekintsük a következő átmenetmátrix által megadott Markov láncot.*

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

*Pozitív visszatérő-e?*

**16. feladat.** *Ha tegnap esett az eső, akkor legyen $\alpha$ annak a valószínűsége, hogy ma is esni fog. Ha tegnap nem esett akkor annak a valószínűsége, hogy ma esni fog legyen $\beta$. Számítsd ki az eső valószínűségének határeloszlását!*

**17. feladat.** *Tegyük fel, hogy egy áruházban egy bizonyos árucikkre a heti kereslet független azonos eloszlású valószínűségi változó, a következő eloszlással*

$$\mathbf{P}\{\text{heti kereslet} = j\} = a_j \quad j \geq 0.$$

*Tegyük fel, hogy az áruház a következő $(s, S)$ rendszer szerint rendel hetente új árut. Ha a hét elején az árukészlet legalább $s$, akkor nem rendelnek; míg ha ennél kevesebb akkor pontosan annyit rendelnek, hogy $S$-re föltöltsék az árukészletet. Vagyis, ha a készlet $x$, akkor a rendelés*

$$\begin{cases} 0, & \text{ha } x \geq s \\ S - x, & \text{ha } x < s \end{cases}$$

*Azok a vásárlói igények, amelyeket nem tudnak azonnal kielégíteni, elvesznek. Jelöljük $X_n$-nel az árukészletet az $n$-edik hét végén és az $n$-edik héten a vásárlói igényt $\gamma_n$-nel. Add meg $X_n$ állapotátmeneti mátrixát!*

**18. feladat.** (Random walk)
*Tekintsük a következő állapotátmeneti mátrixszal adott végtelen állapotú Markov láncot (véletlen bolyongás): $p_{i,i-1} = p$, $p_{i,i+1} = q = 1 - p$ $\forall i \geq 1$, $p_{0,0} = p$, $p_{0,1} = q = 1 - p$.*
*Bizonyítsd be az alábbi állításokat:*

*(a) az állapotok nem visszatérők, ha $p \neq \frac{1}{2}$*

(b) *az állapotok nulla-visszatérők, ha* $p = \frac{1}{2}$

**19. feladat.*** (Doubly stochastic) *Egy átmenetvalószínűségi mátrixot duplán sztochasztikusnak nevezünk, ha az oszlopok összege is 1-et ad, vagyis* $\sum_i p_{ij} = 1\ \forall j \in S$.

(a) *Bizonyítsd be, hogy egy véges állapotú duplán sztochasztikus állapotátmeneti mátrix esetén minden állapot pozitív visszatérő.*

(b) *Bizonyítsd, hogy egy végtelen állapotú irreducibilis, duplán sztochasztikus lánc esetén vagy minden állapot nulla visszatérő vagy nem-visszatérő.*

**20. feladat.*** *Add meg egy* $M$ *véges állapotú, irreducibilis, aperiodikus és duplán sztochasztikus Markov lánc határeloszlását!*

**21. feladat.** (Virus mutation)
*Tegyük fel, hogy egy vírus* $N$ *különböző mutációban fordulhat elő. Minden egyes generáció vagy megmarad az eredeti mutációban* $1-\alpha$ *valószínűséggelvagy* $\alpha$ *valószínűséggel egy másik mutációba alakul át. Mi a valószínűsége annak, hogy az* $n$*-edik generáció ugyanaz a mutáció mint a kezdeti?*

**22. feladat.** *Legyen* $\{X_n\}$ *Markov lánc* $\Pi$ *átmenetvalószínűség mátrixszal. Bizonyítsd be, hogy ha* $Y_n = X_{kn}$ *akkor* $\{Y_n\}$ *is Markov lánc* $\Pi^k$ *átmenetvalószínűségmátrixszal.*

**23. feladat.*** *Legyen* $X_0$ *valószínűségi változó, amely értékeit egy megszámlálható* $I$ *halmazból veszi. Legyen* $Y_1, Y_2, \ldots$ *független, a* $[0,1]$ *intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók sorozata. Tekintsük adottnak a következő* $G$ *függvényt:*

$$G : I \times [0,1] \to I,$$

*és definiáljuk* $X_n$*-et a következő rekurzió szerint:*

$$X_{n+1} = G(X_n, Y_{n+1}).$$

*Bizonyítsd be, hogy* $\{X_n\}$ *Markov lánc és fejezd ki a* $\Pi$ *átmenetvalószínűségi mátrixszot* $G$ *segítségével!*

**24. feladat.** *Legyenek* $Z_0, Z_1, \ldots$ *független azonos eloszlású valószínűségi változók, úgy hogy* $\mathbf{P}\{Z_i = 1\} = p$, $\mathbf{P}\{Z_i = 0\} = 1-p$. *Legyen* $S_0 = 0$, $S_n = Z_1 + \ldots + Z_n$. *Állapítsd meg az alábbiak közül mely esetekben lesz* $X_n$ *Markov lánc. Azokban az esetekben ahol* $X_n$ *Markov lánc, add meg az állapotteret és az átmenetvalószínűségi mátrixot. Egyébként pedig mutass példát arra, hogy* $\mathbf{P}\{X_{n+1} = i | X_n = j, X_{n-1} = k\}$ *nem független* $k$*-tól.*

(a) $X_n = Z_n$

(b) $X_n = S_n$

(c) $X_n = S_0 + \ldots + S_n$

(d) $X_n = (S_n, S_0 + \ldots + S_n)$

**25. feladat.** *Egy bolha egy háromszög csúcspontjain ugrál, úgy hogy minden lehetséges ugrásnak ugyanakkora a valószínűsége. Mi annak a valószínűsége, hogy az n-edik lépés után ugyanott lesz ahonnan indult?*
*Hogyan alakul ez a valószínűség, hogy ha a bolha kétszer akkora valószínűséggel ugrik az óramutató járásával megegyező irányba, mint azzal ellentétesen?*

**26. feladat.*** *Egy szerencsejátékos 2 dollárral kezd játszani és a legrövidebb idő alatt el akarja érni, hogy 10 dollárra növelje vagyonát. A játékszabály a következő. Egy szabályos érmét dobunk föl és a játékosunk el kell találja, hogy fej vagy írás lesz-e a dobásból. Ha eltalálta akkor nyer annyi pénzt amekkora a tétje volt (és természetesen a föltett pénzt is visszakapja), ellenkező esetben elveszti a tétjét. A játékos a következő stratégiát választja. Mindaddig amíg 5 vagy annál kevesebb dollárja van az egészet fölteszi, különben pedig csak annyit tesz föl amennyi nyerése eseten épp arra elegendő, hogy pont 10 dollárja legyen.*
*Bizonyítsd be, hogy a szerencsejátékos 1/5 valószínűséggel fogja elérni célját!*

**27. feladat.*** *Legyen* $\{X_n\}$ *végtelen állapotú Markov lánc a* $\{0,1\ldots\}$ *állapottéren az alábbi állapotátmeneti valószínűségekkel:*

$$p_{01}=1,\quad p_{i,i+1}+p_{i,i-1}=1,\quad p_{i,i+1}=\left(\frac{i+1}{i}\right)^2 p_{i,i-1},\quad i\geq 1.$$

*Mutasd meg, hogy ha* $X_0=0$*, akkor annak a valószínűsége, hogy* $X_n \geq 1\ \forall\ n\geq 1$, $6/\pi^2$.

**28. feladat.** *Az alábbi állapotátmeneti mátrixszal adott Markov lánc esetén mely állapotok lesznek visszatérők és melyek nem visszatérők?*

$$\mathbf{\Pi}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2\\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

**29. feladat.*** *Tegyük fel, hogy egy kocka csúcsain lépegetünk az alábbi szabály szerint. Egy adott csúcsból a szomszédos 3 csúcs bármelyikébe egyenlő valószínűséggel lépünk, függetlenül a korábbi lépésektől. Legyen* $i$ *a kezdeti csúcs és* $o$ *az* $i$*-vel szemközti csúcs. Számítsd ki az alábbi mennyiségeket:*

(a) *az átlagos lépésszám amíg visszatérünk* $i$*-be*

(b) *az* $o$ *csúcs érintésének átlagos száma amíg először visszatérünk* $i$*-be*

(c) *az átlagos lépésszám amíg először elérünk* $o$*-ba*

**30. feladat.** *Egy diák 3 könyvet tart a polcán. Minden reggel véletlenszerűen kiválaszt egy könyvet a három közül, függetlenül korábbi választásaitól. Annak a valószínűsége, hogy az* $i$*-edik könyvet választja* $\alpha_i$*, ahol* $0<\alpha_i<1$, $i=1,2,3$. *Minden este a könyvet visszateszi a polc elejére. Jelöljük* $p_n$*-nel annak a valószínűségét, hogy az* $n$*-edik reggelen a diák a könyveit az 1,2,3 sorrendben találja. Add meg a* $p_n$ *valószínűséget* $n\to\infty$ *esetén.*

**31. feladat.** *Tegyük fel, hogy van* $N$ *darab esernyőnk, amelyeknek egy részét otthon egy másik részét a munkahelyünkön tartjuk. Minden reggel elmegyünk a munkahelyünkre. Ha esik az eső, és van otthon ernyőnk, akkor magunkkal viszünk egy ernyőt. Ugyanígy, ha este elindulunk haza, és esik az eső, és van ernyőnk a munkahelyen, akkor magunkkal viszünk egyet. Ha nem esik az eső, akkor nem viszünk magunkkal ernyőt. Hosszú időre tekintve mi a valószínűsége annak, hogy elázunk, feltéve hogy minden indulásunkkor* $p$ *valószínűséggel esik az eső függetlenül a korábbi időjárástól.*

**32. feladat.*** *Egy operaénekesnő minden este koncertet kellene adjon. Minden este a fellépés után 1/2 valószínűséggel visszavonul, és a további estéken mindaddig nem lép fel újra, amíg a managere ki nem engeszteli. Ezt a manager úgy próbálja elérni, hogy minden nap virágot küld az énekesnőnek mindaddig, amíg az vissza nem tér. Ha $x$ ezer dollárért vásárolt már virágot az $\sqrt{x}$ valószínűséggel fogja kiengeszteli az énekesnőt. Ha a manager minden koncerten 750 dollárt keres, mennyi pénzt érdemes virágra költenie?*

**33. feladat.** *Bizonyítsd be, hogy minden független növekményű folyamat Markov folyamat!*

**34. feladat.** *Legyen $Y_{1,n}, Y_{2,n}, \ldots, Y_{n,n}$ $n$ független a $(0,t)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Legyen $Z_n = \min(Y_{1,n}, Y_{2,n}, \ldots, Y_{n,n})$.*

(a) *Add meg a $\mathbf{P}\{Z_n > x\}$ valószínűséget.*

(b) *Legyen $t$ egy függvénye $n$-nek, úgy hogy $\lim_{n\to\infty} n/t = \lambda$. Bizonyítsd be, hogy $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{Z_n > x\} = e^{-\lambda x}$.*

**35. feladat.*** *Tekintsük az alábbi állapotátmeneti mátrixszal adott Markov láncot*

$$P_{i,i+1} = p_i, \quad P_{i,i-1} = q_i = 1 - p_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

*ahol $p_0 = 1$. Bizonyítsd be, hogy a lánc pozitív visszatérő akkor és csak akkor, ha*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_0 \cdots p_j}{q_1 \cdots q_{j+1}} < \infty$$

**36. feladat.** *Tekintsünk egy szerencsejátékost, aki minden egyes játék alkalmával $p$ valószínűséggel nyer 1 dollárt és $q = 1 - p$ valószínűséggel veszít 1 dollárt. Ha az egymást követő játékok egymástól függetlenek, mi annak a valószínűsége, hogy $i$ dollárral indulva a játékosnak $N$ dollárja lesz? (Természetesen úgy, hogy közben a vagyona egyszer sem csökken 0-ra).*

**37. feladat.** *$N$ darab fehér és $N$ darab fekete golyó van szétosztva két urnába úgy, hogy mindegyikben pontosan $N$ darab golyó van. Definiáljuk a rendszer állapotát a következőképpen. Az $i$-edik állapot ($i = 0, 1 \ldots, N$) jelentse azt, hogy az első urnában $i$ darab fekete golyó van. Minden lépesben egy-egy golyót húzunk az első illetve a második urnából. Azt a golyót amelyiket az első urnából húztunk a második urnába tesszük vissza, míg a másodikból húzottat az elsőbe tesszük. Add meg a $p_{ij}$ állapotátmeneti valószínűségeket!*

**38. feladat.** *Tekintsük a következő állapotátmeneti valószínűségekkel adott Markov láncot a $0, 1, 2, \ldots$ végtelen állapottéren.*

$$P_{0,i} = P_i > 0, \quad \sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1, \quad \sum_{i=0}^{\infty} i P_i < \infty$$
$$P_{i,i-1} = 1 \quad (i \geq 1)$$

*Mutasd meg, hogy a lánc irreducibilis, aperiodikus, pozitív visszatérő és add meg a stacionárius eloszlását!*

**39. feladat.** *Dobjunk egy szabályos dobókockával $n$-szer egymás után és tegyük fel, hogy a dobások egymástól függetlenek. Legyen $X_n$ az összege az $n$ dobás során kapott értékeknek. Számítsd ki a következő határértéket*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{X_n \text{ osztható 13-mal}\}.$$

**40. feladat.** *Bizonyítsd be, hogy tetszőleges véges állapotú Markov láncnak nincs nulla visszatérő állapota, és nem lehet az összes állapota nem visszatérő!*

# 2. Folytonos idejű Markov láncok

**41. feladat.** *Tegyük fel, hogy bizonyos események $\lambda$ paraméterű Poisson folyamat szerint generálódnak. A feladatunk az, hogy számoljuk a jelen időpontig bekövetkezett események számát. Azonban minden egyes bekövetkezett eseményt csak $p$ valószínűséggel veszünk észre és számolunk meg. Bizonyítsd be, hogy ez a számoló folyamat Poisson folyamat $\lambda p$ paraméterrel!*

**42. feladat.** *Legyen $\{N(t), t \geq 0\}$ egy $\lambda$ paraméterű Poisson folyamat. Számítsd ki a $\mathbf{E}\{N(t)N(t+s)\}$ mennyiséget!*

**43. feladat.** *Legyen $\{N_1(t), t \geq 0\}$ és $\{N_2(t), t \geq 0\}$ két független Poisson folyamat $\lambda_1$ és $\lambda_2$ paraméterekkel. Mutasd meg, hogy $\{N_1(t) + N_2(t), t \geq 0\}$ is egy Poisson folyamat $\lambda_1 + \lambda_2$ paraméterrel.*
*Bizonyítsd be azt is, hogy annak a valószínűsége, hogy az $\{N_1(t) + N_2(t), t \geq 0\}$ összetett folyamat első bekövetkező eseménye $\{N_1(t), t \geq 0\}$-től származik $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$, függetlenül az első esemény bekövetkeztének időpontjától.*

**44. feladat.** *A 43. feladatban add meg annak a valószínűséget, hogy $N_1(t)$ eléri $n$-et mielött még $N_2(t)$ elérné $m$-et!*

**45. feladat.** *Legyen $\{N(t), t \geq 0\}$ egy $\lambda$ paraméterű Poisson folyamat és $Y$ legyen egy pozitív, $\{N(t), t \geq 0\}$-től független valószínűségi változó. Számítsd ki $\mathbf{E}\{N(Y)\}$ és $\boldsymbol{\sigma}^2\{N(Y)\}$ mennyiségeket!*

**46. feladat.** *Tegyük fel, hogy a vevők egy $\lambda$ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek az üzletbe. Végtelen sok kiszolgáló van és a kiszolgálási idő exponenciális eloszlású $\mu$ paraméterrel. Mutasd meg, hogy a $t$-edik időpillanatban az üzletben lévő vevők száma $Q(t)$ egy születési-halálozási folyamatot alkot. Add meg $Q(t)$ határeloszlását!*